latives Prinzip der Analysis bedeutet, ein Wegweiser zur Orientierung der Gedankenbildungen mehr als ein Forschungsmittel. Gerade in dieser Hinsicht hat die Hilbertsche Idee schon starke Wirkung ausgeübt und scheint dazu berufen, noch reiche Früchte zu zeugen.

Wenn es auch in dem Rahmen dieses Aufsatzes nicht möglich ist, im einzelnen ein Bild von der Tiefe und Kraft des Analytikers *Hilbert* zu geben, dessen wahrhaft radioaktives wissenschaftliches Temperament mittelbar oder unmittelbar die meisten Mathematiker der letzten Generationen angeregt hat, so hoffe ich doch, einen Eindruck vermittelt zu haben, von dem aufs Ganze, auf die Einheit der Wissenschaft gerichteten Eros, welcher der wissenschaftlichen Persönlichkeit den Stempel aufdrückt und dem Träger in einer Epoche der Einzelleistung, Zersplitterung und Zerfaserung in der Wissenschaft einen ganz besonderen Platz anweist.

Hilbert und die Physik.

Von M. Born, Göttingen.

Im Jahre 1905 fanden in Göttingen Übungen des mathematisch-physikalischen Seminars über Elektronentheorie statt, die *Minkowski* und *Hilbert* gemeinsam leiteten. Die Anregung zu diesem Unternehmen, das die beiden befreundeten Mathematiker von ihrem eigentlichen Arbeitsgebiet abzog und sie zu tiefem Eindringen in die Nachbarwissenschaft veranlaßte, mag damals von *Minkowski* ausgegangen sein, der von den Geheimnissen und Rätseln der Lorentzschen Elektrodynamik gelockt wurde und darin zugleich ein lohnendes Feld der Betätigung für seine geometrischen und algebraischen Kräfte erschaute. Der Schreiber dieser Zeilen, dem es vergönnt war, an diesem Seminar als Student teilzunehmen, erinnert sich an anregende und aufregende Stunden, die mit Diskussionen über die Fitz-Geraldsche Kontraktion, die Lorentzsche Ortszeit und andere, damals noch ganz phantastisch erscheinende Ansätze der Elektrodynamik erfüllt waren, und an denen sich auch *Hilbert* häufig klärend und auf Klarheit dringend beteiligte. Diese Übungsstunden sind bemerkenswert geworden, weil hier die beiden Mathematiker die Anregungen schöpften, die sie später, jeden zu seiner Zeit, zum Eingreifen in die Entwicklung der Relativitätstheorie führten.

Minkowskis Leistungen auf diesem Gebiete sind bekannt genug. Zu jener Zeit, als *Einsteins* erste, berühmte Arbeit erschien, die die Relativierung der Zeit enthielt, hatte *Minkowski* die mathematische Struktur der Feldgleichungen des Äthers und ihre Darstellung in der vierdimensionalen Raum-Zeit-Welt schon entdeckt und die Bedeutung der Invarianz der Naturgesetze gegenüber der Lorentzschen Transformationsgruppe erkannt. Aber er trat erst 1908 mit seinen Gedanken an die Öffentlichkeit, als es ihm gelungen war, die Feldgleichungen für bewegte, ponderable Körper aus dem Relativitätsprinzip abzuleiten.

Hilbert verfolgte damals die Untersuchungen des Freundes mit einer Anteilnahme, die sich oft zur Begeisterung steigerte; denn in ihm wohnte jener Glaube an die Einfachheit und Begreifbarkeit der Natur, der zum Wesen des Naturforschers gehört, aber beim Mathematiker durchaus nicht immer zu finden ist, und er sah in *Einsteins* und *Minkowskis* Resultaten Erfüllung dieses Glaubens. Aber er selbst trat zunächst nicht mit eigenen Arbeiten physikalischer Richtung hervor, auch dann nicht, als *Minkowski* 1909 plötzlich starb und eine Fülle von Problemen ungelöst zurückließ. Es war die Periode, in der *Hilbert* seine Theorie der Integralgleichungen und der quadratischen Formen von unendlich vielen Variabeln zum Abschluß brachte. Wenn er auch durch diese Untersuchungen ganz erfüllt wurde und nicht zu produktiver Tätigkeit auf dem von *Minkowski* gewiesenen Wege kam, hat er doch seit jener Zeit nie mehr aufgehört, sich für physikalische Probleme zu interessieren. Auch die *Lehre von den Integralgleichungen* war ja mit den Methoden der klassischen theoretischen Physik aufs engste verknüpft, vor allem mit den Randwertaufgaben, die in der Theorie des Potentials und vieler Differentialgleichungen der Physik auftreten. Die theoretischen Physiker hatten hier zwei wesentlich verschiedene Lösungsmethoden entwickelt, die *Methode der Reihen* nach dem Vorbilde der Fourierschen Reihe und die *Methode der Greenschen Funktion.* Man kann diese Verfahren etwa an dem Beispiel der Wärmeleitung in einem dünnen Stabe so kennzeichnen: Entweder faßt man die Temperaturverteilung als Superposition von einfach harmonischen (sinusförmigen) Temperaturwellen auf (Reihenentwicklung nach *Fourier*), oder man denkt sich an jeder Stelle des Stabes eine unendlich kleine Wärmequelle und bestimmt diese so, daß ihr Zusammenwirken die tatsächliche Temperaturverteilung erzeugt (Integralgleichung mit der Greenschen Funktion als Kern). *Hilbert* stellte nun ganz allgemein die Beziehung dieser Ansätze zu den linearen Integralgleichungen zweiter Art her, und es gelang ihm auf diesem Wege, nicht nur alle die mannigfaltigen Theorien der physikalischen Differentialgleichungen unter einen umfassenden Gesichtspunkt zusammenzufassen, sondern auch viele Lücken auszufüllen, die der Mathematiker in diesen Gebieten schmerzlich empfindet, Sätze über Existenz von Lösungen und Konvergenz von Reihen, über deren Schwierigkeit der Physiker sich leichten Sinns, auf Beute lüstern, kühn hinwegsetzt. Heute erscheinen z. B. sämtliche Schwingungsprobleme der Mechanik und Physik als Übertragungen der Theorie von den Hauptachsen eines Ellipsoides auf den Fall des „Raumes von unendlich vielen Dimensionen", d. h. der Mannigfaltigkeit aller Funktionen, die sich in Reihen mit abzählbar vielen Koeffizienten (wie Potenzreihen, Fourierreihen usw.) entwickeln lassen.

Wurde so eine große Übersicht, Strenge und Klarheit gewonnen, so hatte der rechnende Physiker doch durch Benutzung der Integralgleichungen nur selten Vorteil; meist erwiesen sich für praktische Rechnung die alten Differentialgleichungsmethoden als bequemer, und in neuerer Zeit ist es auch *Courant* gelungen, die allgemeinen Existenz- und Konvergenzsätze mit den Methoden der Variationsrechnung und der Differentialgleichungen in sehr durchsichtiger Weise direkt zu begründen. Geht man auf den physikalischen Ursprung der mathematischen Gleichungen zurück, so findet man als *primären* Ausdruck der Erfahrungstatsachen und Hypothesen manchmal die Integralgleichung, manchmal die Differentialgleichung; in der Lehre vom elektrischen Gleichgewicht z. B. führt die Annahme von Kräften, die nach dem Coulombschen Gesetze in die Ferne wirken, direkt zu einer Integralgleichung für die Dichte der Ladungsverteilung, dagegen liefern jene Theorien, bei denen die Wirkung sich von Stelle zu Stelle fortpflanzt und die seit *Faraday* und *Maxwell* die Lehre vom elektromagnetischen Felde beherrschen, primär eine partielle Differentialgleichung (Poissonsche Gleichung). Mathematisch sind beide Ansätze äquivalent, sofern die Differentialgleichung mit den richtigen Anfangs- und Grenzbedingungen versehen wird. Aber es gibt auch Gebiete der Physik, wo keine Wahl ist, sondern wo die geltenden physikalischen Begriffe eindeutig auf eine Integralgleichung als Ausdruck der Tatsachen führen. *Hilbert* fand ein solches Gebiet zuerst in der *kinetischen Gastheorie*, und er hat die Sammlung seiner Abhandlungen über Integralgleichungen (B. G. Teubner, 1912) mit der Darstellung dieser Theorie abgeschlossen, offensichtlich hoch erfreut über die Macht des von ihm geschaffenen analytischen Hilfsmittels, die sich hier bei der Aufklärung eines in seiner logischen Struktur bis dahin recht dunklen Teils der Molekularphysik bewährte.

Maxwell und *Boltzmann* haben die Hypothesen der kinetischen Gastheorie folgendermaßen in eine einzige Gleichung zusammengefaßt: Es seien x, y, z die Koordinaten und ξ, η, ζ die Geschwindigkeitskomponenten einer Molekel; die Anzahl der Molekeln, die in einem Volumenelement $dx\,dy\,dz$ und einem Geschwindigkeitsbereich $d\xi\,d\eta\,d\zeta$ liegen, sei $F\,dx\,dy\,dz\,d\eta\,d\zeta$, wo die „Verteilungsfunktion" F außer von $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$ noch von der Zeit t abhängen wird. Ist F bekannt, so kann man alle beobachtbaren Größen durch Mittelwertbildung berechnen, z. B. die sichtbare, mittlere Geschwindigkeit als

$$\frac{\int F\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta}{\int F\,d\xi\,d\eta\,d\zeta}$$

Zur Bestimmung von F muß man bedenken, daß die totale zeitliche Änderung von F unter der Wirkung einer beschleunigenden Kraft mit den Komponenten X, Y, Z:

$$D(F)=\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial x}\xi+\frac{\partial F}{\partial y}\eta+\frac{\partial F}{\partial z}\zeta + \frac{\partial F}{\partial \xi}\frac{X}{m}+\frac{\partial F}{\partial \eta}\frac{Y}{m}+\frac{\partial F}{\partial \zeta}\frac{Z}{m}$$

durch die Zusammenstöße erzeugt wird, die einige Molekeln aus einem betrachteten Gebiete herauswerfen, während dafür andere hineingelangen. Unter der Annahme vollkommen ungeordneter Molekularbewegung ist die resultierende Änderung von F ein Integral $J(F)$, dessen Integrand quadratisch von F abhängt; daher ergibt sich eine Integro-Differentialgleichung:

$$D(F)=J(F)$$

die die exakte Grundlage aller gaskinetischen Folgerungen bildet.

Solche Folgerungen sind von *Maxwell, Boltzmann* und anderen gezogen worden, und es hat sich gezeigt, daß man die Gesetze der makroskopischen Bewegung und der thermischen Vorgänge in Gasen qualitativ richtig erhält. Aber die Kette der mathematischen Schlüsse war nicht eindeutig und willkürfrei; man mußte an manchen Stellen zu Mittelwertsbildungen die Zuflucht nehmen, weil die strenge Rechnung nicht durchführbar erschien, und hierdurch kam eine Unsicherheit in die Berechnung der gastheoretischen Konstanten (wie Wärmeleitungs- und Reibungskoeffizient), deren eindeutige Festlegung gerade das Hauptziel der Theorie ist. Hier griff nun *Hilbert* ein. Er bemerkte, daß das von den Physikern bei der Lösung der Grundgleichung eingeschlagene Näherungsverfahren aufgefaßt werden kann als Reihenentwicklung nach Potenzen eines Parameters, der der mittleren freien Weglänge der alten Theorie entspricht; dabei gibt die erste Näherung in bekannter Weise die Gesetze des ruhenden Gases, also vor allem für F das Maxwellsche Verteilungsgesetz, die höheren Näherungen aber werden lineare Integralgleichungen zweiter Art mit symmetrischem Kern. Auf diese läßt sich nun die allgemeine Theorie der Integralgleichungen anwenden und liefert zwangsläufig und ohne Willkür nicht nur die mechanischen und thermischen Gesetze der Gase, sondern auch eindeutige Rechenvorschriften, aus denen sich die Konstanten numerisch berechnen lassen, sobald die Gesetze der beim Zusammenstoß in Wirksamkeit tretenden anziehenden und abstoßenden Kräfte bekannt sind. Umgekehrt ist damit zum erstenmal ein eindeutiger Schluß von den beobachteten Gaskonstanten auf die Molekularkräfte möglich, und solche Rechnungen sind inzwischen von *Chapman* und *Enskog* (mit gewissen Modifikationen des Hilbertschen Verfahrens) durchgeführt worden. Das hierdurch geschaffene Material wiederum konnte *Debye* verwenden, als er seine elektrische Theorie der Molekularkräfte an der Erfahrung prüfen wollte. So haben die von *Hilbert* erdachten mathematischen Methoden mittelbar die moderne Atomforschung befruchtet.

Das von *Hilbert* zur Lösung der gaskinetischen Grundgleichung entwickelte Verfahren ist übrigens von allgemeinerer Bedeutung und hat sich auch in anderen Disziplinen als fruchtbar erwiesen. Man kann es kurz etwa so beschreiben: Bei den sukzessiven Näherungen ist die erste Gleichung homogen, die folgenden sind inhomogen mit derselben linken Seite, z. B. in der Gastheorie:

$$J(F_0) = 0, \quad J(F_1) = D(F_0) \; . \; . \; . \; .$$

Wenn nun die erste Gleichung auflösbar ist, so kann es die zweite nicht immer sein, sondern nur dann, wenn die rechte Seite gewissen Bedingungen genügt. Diese Auflösbarkeitsbedingungen, denen die in F_0 vorkommenden Parameter (Dichte, Temperatur, Komponenten der mittleren Geschwindigkeit) genügen müssen, stellen nun gerade die makroskopischen Gesetze der Bewegung und des Wärmestromes dar.

Dieser Gedanke liefert das allgemeine Verfahren, um zwangsläufig, ohne willkürliche Mittelwertbildung aus den verwickelten Gesetzen für die ungezählten Variabeln der molekularen Welt die einfachen Gleichungen für die wenigen meßbaren Größen zu gewinnen. Die beschriebene Methode wurde von einigen Schülern *Hilberts* auf Probleme der Ionenbewegung in Elektrolyten und der Elektronenbewegung in Metallen erfolgreich angewandt; besonders bewährt hat sie sich in der kinetischen Theorie der festen Körper, und der Verfasser dieses Aufsatzes wußte das Verdienst *Hilberts* um diesen Fortschritt nicht besser auszudrücken, als daß er sein Buch über Dynamik der Kristallgitter dem verehrten Lehrer widmete.

Hilbert entdeckte noch einen zweiten Fall, wo der physikalische Ansatz direkt auf eine Integralgleichung führt, die *elementare Strahlungstheorie*. Hierunter sind jene einfachen, zuerst von *Kirchhoff* aufgestellten Gesetze zu verstehen, die das geometrische und energetische Verhalten der Strahlung im thermodynamischen Gleichgewicht regeln, und deren bekanntestes gewöhnlich so formuliert wird: Das Verhältnis von Emissionsvermögen und Absorptionsvermögen ist im Falle reiner Temperaturstrahlung eine universelle Funktion der Temperatur und der Wellenlänge, also unabhängig von der Natur und dem sonstigen Zustande der Körper. *Planck* hatte an die Stelle der Kirchhoffschen Integralbegriffe „Emissions- und Absorptionsvermögen“ die auf das Volumenelement bezogenen Größen „Emissionskoeffizient“ ε und „Absorptionskoeffizient“ α eingeführt und gezeigt, daß dann die Kirchhoffschen Sätze sich in die eine Formel fassen lassen: Die aus ε, α und der Lichtgeschwindigkeit q gebildete Größe $\frac{q^2 \varepsilon}{\alpha}$ hängt nicht ab von der Natur der Substanz, sondern ist eine universelle Funktion der Temperatur und der Schwingungszahl. *Hilberts* erste Arbeit geht darauf aus, diesen Satz ohne die von den Physikern gemachten, vereinfachenden Annahmen (homogene, einfach begrenzte Körper usw.) zu begründen, er läßt die drei Parameter ε, α, q als beliebige Funktionen des Ortes zu und zeigt dann, daß die Forderung des Energiegleichgewichts für jede einzelne Farbe zu einer homogenen Integralgleichung zweiter Art für ε führt, deren einzige Lösung $\varepsilon = \frac{\alpha}{q^2}$ konst. ist.

Um diese, mathematisch höchst elegante Arbeit entstand nun eine wenig erfreuliche Polemik zwischen *Hilbert* und dem Physiker *E. Pringsheim*. Dieser warf *Hilbert* vor, daß er unter Betonung der Unzulänglichkeit aller früheren Beweise des Kirchhoffschen Satzes gerade die Tatsache als Voraussetzung seines Beweises gebraucht habe, die von *Kirchhoff* und allen übrigen Physikern als der tieferen Begründung besonders bedürftig angesehen wird und deren Ableitung der Hauptteil der Kirchhoffschen Arbeit ist: nämlich die Tatsache, daß die Strahlung jeder Wellenlänge für sich im Gleichgewicht ist und kein Energieaustausch zwischen verschiedenen Spektralbezirken stattfindet. Dieser Vorwurf ist durchaus berechtigt, und *Hilbert* hat, sobald er auf diesen Mangel aufmerksam wurde, seine Überlegungen in der geforderten Richtung ausgestaltet; dabei hat er die axiomatische Darstellung angewandt, wohl in der Überzeugung, daß nur auf diesem Wege Klarheit in das Knäuel physikalischer Voraussetzungen und mathematischer Schlüsse zu bringen sei. Gegen diese Wendung erhob nun *Pringsheim* energisch Einspruch, und es ist äußerst interessant, an diesem Falle die Verschiedenheit physikalischen und mathematischen Denkens zu verfolgen. Der Physiker geht darauf aus, zu erforschen, wie die Dinge in der Natur sind; Experiment und Theorie sind ihm dabei nur Mittel zum Zweck, und im Bewußtsein der unendlichen Kompliziertheit des Geschehens, die ihm bei jedem Experiment entgegentritt, wehrt er sich dagegen, irgendeine Theorie als endgültig anzusehen. Darum verabscheut er das Wort „Axiom“, dem im gewöhnlichen Sprachgebrauch der Sinn der endgültigen Wahrheit anhaftet, in dem gesunden Empfinden, daß Dogmatismus der schlimmste Feind der Naturwissenschaft sei. Der

Mathematiker aber hat nicht mit Tatsachen des Geschehens, sondern mit logischen Zusammenhängen zu tun, und in *Hilberts* Sprache bedeutet axiomatische Behandlung einer Disziplin keineswegs die endgültige Aufstellung bestimmter Axiome als ewiger Wahrheiten, sondern die methodische Forderung: Nenne deine Voraussetzungen am Anfang deiner Überlegung, halte dich daran und untersuche, ob diese Voraussetzungen nicht zum Teil überflüssig sind oder gar einander widersprechen. Diese logische Konsequenz ist zweifellos das Ideal jedes Erkenntnisgebietes, aber je weiter man sich von der reinen Mathematik entfernt, um so weniger erfüllt (oder erfüllbar) ist auch dieses Ideal, und selbst in der exakten Physik findet sich nur allzu häufig mitten in der Entwicklung ein Satz wie: „wenn wir nun die Annahme machen, daß usw.“. *Pringsheims* Polemik, in der Betonung des physikalisch Wichtigen durchaus berechtigt, schoß nun sowohl in der Form als auch in der Beurteilung von *Hilberts* Absichten über das Ziel hinaus. Er verkannte nicht nur den Sinn der axiomatischen Darstellungsweise, den wir soeben erläutert haben, sondern er warf auch *Hilbert* einen Fehler vor. Dieser hatte nämlich zum Beweise der Unmöglichkeit, aus der Annahme des Gleichgewichts der Gesamtenergie aller Wellenlängen die Kirchhoff-Plancksche Formel abzuleiten, die Größen q und α unabhängig von λ beide gleich 1 gesetzt; *Pringsheim* hält dies für unzulässig, weil es in der Natur keine Körper gibt, die Absorption ($\alpha = 1$), aber keine Dispersion ($q = 1$, d. h. gleich der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum) haben. Mit demselben Rechte könnte man sagen: Der Lobatschewskysche Beweis der Unmöglichkeit, das Parallelenaxiom aus den übrigen Axiomen *Euklids* herzuleiten, ist falsch, denn die dabei verwendete nicht-euklidische Geometrie existiert in der Wirklichkeit nicht. *Hilbert* konnte diesen Vorwurf *Pringsheims* mit Recht als Mißverständnis zurückweisen.

Pringsheim hat noch andere Einwände von geringerem Gewichte gegen *Hilberts* Arbeit vorgebracht, z. B. daß er die Zerstreuung und Reflexion nicht berücksichtigt habe. In einer zusammenfassenden Bearbeitung (Göttinger Nachrichten 1914) hat dann *Hilbert* gezeigt, daß seine Beweisführung auch bei Berücksichtigung aller dieser Vorgänge gültig bleibt; diese letzte Abhandlung *Hilberts* über das Gebiet der elementaren Strahlungslehre wird immer als die strengste und durchsichtigste Darstellung dieser Theorie zu gelten haben.

Gleichwohl fand sie bei den Physikern wenig Beachtung; das lag hauptsächlich daran, daß die tieferen Probleme der Strahlungstheorie, vor allem das Gesetz der spektralen Energieverteilung des schwarzen Körpers, an Wichtigkeit weit voranstanden. Denn hier ergaben sich Zusammenhänge mit den letzten Prinzipien der Physik, die heute gerade durch die Erforschung der Strahlungsgesetze in einer Wandlung begriffen sind. Auch *Hilbert* hat niemals die Bedeutung der Kirchhoffschen Strahlungsgeometrie überschätzt, sondern seit seinem ersten Eindringen in die Gedanken der modernen Physik den Schwerpunkt der Fragestellung in den Problemen der Statistik und der Quanten gesehen. Mehrere Jahre hat er viel Zeit und Arbeit darauf gewandt, diese Gebiete mit der Schärfe seiner Logik zu durchdringen und zu erhellen; aber er hat seine Resultate niemals publiziert, sondern nur seinen Schülern in Vorlesungen bekanntgemacht; er begann mit einem Kolleg über seinen Aufbau der kinetischen Gastheorie und schloß daran eine Reihe von Vorlesungen über Molekulartheorie, statistische Mechanik, Nernstsches Wärmetheorem, Quantentheorie u. ä. Die wunderbare Anwendung, die die klassische Hamilton-Jacobische Mechanik in der Quantentheorie findet, bot dabei einen Anknüpfungspunkt an berühmte ältere Vorlesungen *Hilberts* über Variationsrechnung und höhere Mechanik. Zugleich begann *Hilbert* die von ihm geleiteten Übungen des mathematischen Seminars, anknüpfend an die Tradition der letzten Minkowskischen Zeit, hauptsächlich den Problemen der theoretischen Physik zu widmen, und bis heute werden diese Seminarstunden über das Thema „Struktur der Materie“ fortgesetzt. *Minkowskis* Rolle übernahm der Physiker *P. Debye*, der, gleich bedeutend als Experimentator und Theoretiker, in diese Übungsstunden den lebendigen Pulsschlag der physikalischen Forschung hereinzutragen wußte.

Natürlich spielte bei den Diskussionen des Seminars die *Relativitätstheorie* immer eine große Rolle, und man verfolgte mit großem Anteil die Arbeiten, mit denen *Einstein* ganz allmählich zu seiner allgemeinen Gravitationstheorie vordrang. Aber auch die Abhandlungen von *Abraham, Nordstroem* und *Mie,* die zum selben Ziele strebten, wurden studiert, und *Hilbert* wurde besonders von den Ideen *Mies* gefesselt, der eine „Theorie der Materie“ auf der Grundlage des Relativitätsprinzips aufzubauen versuchte. *Mie* gelang es, die Maxwellschen Gleichungen des elektromagnetischen Feldes in rationeller Weise so zu verallgemeinern, daß sie ihren linearen Charakter verloren, und er verfolgte das Ziel, die Existenz der materiellen Urteilchen, besonders des Elektrons, aus den Feldgleichungen abzuleiten. Man versteht, daß dieses Problem für einen Mathematiker wie *Hilbert* besonders anziehend war, denn die Grundlagen der Mieschen Theorie ließen sich nicht nur in sehr durchsichtiger Weise mathematisch formulieren, sondern erforderten auch bei der Durchführung des Programms einen beträchtlichen Aufwand nicht trivialer analytischer Hilfsmittel. Aber *Hilbert* sah weiter als der Begründer dieser Theorie, indem er die Brücke zu *Einsteins* Gedanken über die allgemeine Relativität und Gravitation entdeckte.

Damals, im Jahre 1914, hatte *Einstein* erkannt, daß sein Äquivalenzprinzip von Trägheit und Schwere bei konsequenter Durchführung notwendig dazu führen mußte, die Vorstellung eines a priori gegebenen, euklidischen Raumes und einer absoluten Zeit fallen zu lassen, vielmehr die Raum-Zeit-Welt als beliebige 4-dimensionale Mannigfaltigkeit im Riemannschen Sinne aufzufassen, wobei die Maßbestimmung durch eine quadratische Form der Koordinatendifferentiale gegeben ist. Die 10 Koeffizienten dieser Differentialform mußten die Gravitation bestimmen, und es kam darauf an, die für sie gültigen Gesetze aufzufinden unter Ausnutzung der Andeutungen, die durch die Forderung der Invarianz und durch den Anschluß an die Newtonsche Gravitationstheorie gegeben waren. Während *Einstein* zunächst vergeblich, sodann auf großen Umwegen sich diesen Gesetzen zu nähern suchte, kam *Hilbert* gänzlich unabhängig auf einem anderen Wege zur Lösung dieses Problems, und der Zufall wollte, daß beide Forscher fast genau gleichzeitig am Ziele anlangten. *Einstein* legte seine beiden grundlegenden Abhandlungen „Zur allgemeinen Relativitätstheorie“ am 11. und 25. November 1915 der Berliner Akademie vor, *Hilbert* seine erste Note über die „Grundlagen der Physik“ am 20. November der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften. Dieses merkwürdige Zusammentreffen hat aber keineswegs zu irgendwelchen Prioritätsstreitigkeiten zwischen den beiden Männern Anlaß gegeben; vielmehr führte der Briefwechsel, der aus dem Austausch der wissenschaftlichen Ansichten entstand, zu persönlichem Zusammentreffen und freundschaftlichem Verkehr. *Hilbert* blieb sich stets bewußt und hat dem in zahlreichen Vorträgen und in seinen Abhandlungen Ausdruck gegeben, daß die Hauptsache durchaus die großartige physikalische Idee *Einsteins* sei; wie für *Vischers* „Auch Einer“ sich „das Moralische immer von selbst versteht“, so für einen *Hilbert* „das Mathematische“, selbst da, wo es wie in der Relativitätstheorie die höchsten geometrischen Abstraktionen betrifft. Es war übrigens keineswegs sofort offenbar, daß die Ansätze *Einsteins* und *Hilberts* gleichwertig, ja nicht einmal, daß sie miteinander verträglich seien. *Einstein* baute seine Gravitationsgesetze induktiv auf; dabei machte er keinerlei Annahmen über das Wesen der das Gravitationsfeld erzeugenden Materie, sondern charakterisierte diese durch ihren Energie-Impuls-Spannungs-Tensor. Seine Gravitationsformeln besagen, daß dieser Tensor der Materie überall proportional dem „verjüngten Krümmungstensor“ ist, einer kovarianten Größe, die aus den Koeffizienten der fundamentalen Differentialform und ihren ersten und zweiten Ableitungen gebildet ist. *Hilbert* knüpft an die Gedanken an, die *Mies* „Theorie der Materie“ zugrunde liegen; dabei wird die Materie durchaus als elektrisches Phänomen angesehen und durch ein „Viererpotential“ mathematisch charakterisiert, dessen 4 Komponenten zugleich mit den 10 Komponenten des Schwerefeldes den Zustand der Welt in jedem Punkte beschreiben. Zur Bestimmung dieser 14 unbekannten Funktionen dient, wieder nach dem Vorbilde von *Mie*, ein invariantes Variationsprinzip; während dieses aber bei *Mie* nur invariant ist gegen die Lorentz-Transformationen der speziellen Relativitätstheorie, ist es bei *Hilbert* allgemein invariant, und daraus folgt, daß zwischen den 14 Differentialgleichungen für die 14 gesuchten Funktionen 4 Identitäten bestehen. In diesen 4 identischen Relationen zwischen den Gesetzen des Gravitationsfeldes und denen des elektrischen Feldes (den Maxwellschen Gleichungen) sah *Hilbert* selbst den Höhepunkt seiner Leistung, nämlich die Auffindung des Bandes zwischen den beiden Feldarten, die bisher nebeneinander beziehungslos bestanden. Aus einigen Stellen dieser Note *Hilberts*, besonders aus dem enthusiastischen Schlusse, geht deutlich hervor, daß er von seinen Feldgleichungen noch Größeres erwartete, nämlich die Erreichung des Ziels, das *Mie* vorgeschwebt hatte: die Ableitung des Elektrons und der Atome aus den Feldgesetzen. Diese Hoffnungen haben sich zwar nicht erfüllt; das Geheimnis der Materie und ihrer quantenhaften Struktur läßt sich wohl auf diesem formalen Wege nicht ergründen. Aber auch so bleibt *Hilberts* erste Note ein historisches Dokument: sie bedeutet zusammen mit den beiden gleichzeitigen Arbeiten *Einsteins* die Geburt der allgemeinen Relativitätstheorie. Außer *Einstein* selbst haben das wohl wenige sogleich erkannt; denn *Hilberts* Abhandlung ist äußerst schwer geschrieben, für Physiker geradezu unzugänglich. *Klein* hat das Verdienst, die Hilbertschen Gedanken sofort erfaßt und in klarer und einfacher Weise dargestellt zu haben; er fand sowohl für *Hilberts* erste Note, als auch für *Einsteins* Abhandlungen und für die zweite Note *Hilberts* die adäquate Form, indem er ihren mathematischen Inhalt den allgemeinen Ideen unterordnete, die er vor Jahrzehnten (1872) in seinem berühmten Erlanger Programm ausgesprochen hatte. Der Grundgedanke dieser Schrift ist die Erkenntnis, daß das Lehrgebäude der Geometrie oder irgendein in sich abgeschlossener Teil desselben (wie Analysis situs, projektive Geometrie, Kugelgeometrie usw.) aufgefaßt werden kann als Invariantentheorie einer bestimmten Gruppe von Transformationen. Die Riemannsche allgemeine Raumlehre erscheint von diesem Standpunkt aus als die Invariantentheorie bezüglich aller stetigen Transformationen der 3 Raumkoordinaten, bei denen eine quadratische Differentialform in sich übergeht; und von hier aus zur Einsteinschen allgemeinen Relativitätstheorie ist nur ein Schritt, der in der Hinzufügung der Zeit als vierter Koordinate zu den 3 Raumabmessungen besteht. So waren die Mathematiker wohl präpariert zur schnellen Erfassung von *Einsteins* Lehre, und es ist verständlich, daß die führenden Mathematiker

Hilbert und *Klein* an der Entwicklung der Theorie lebhaften Anteil nahmen. Ja, die Ideen *Einsteins* erschienen ihnen so natürlich, daß sie den Widerstand gar nicht begreifen konnten, den die Relativitätstheorie nicht nur bei Laien, sondern auch innerhalb der Physik fand. Die Gegenargumente, die vorgebracht wurden, erhoben sich ja auch niemals über das niedrigste Niveau und mußten den an den Werken eines *Gauß, Riemann, Helmholtz* Geschulten nur lächerlich erscheinen.

Die schon oben erwähnte zweite Note *Hilberts* enthält außer einigen mathematischen Folgerungen aus den Feldgleichungen vor allem eine ausführliche Diskussion der Stellung des Kausalgesetzes zur allgemeinen Relativität. Nach der gewöhnlichen Fassung verlangt dieses, daß durch den Zustand der Welt in Gegenwart und Vergangenheit vermöge der Naturgesetze der Zustand der Welt in der Zukunft eindeutig und notwendig bestimmt sei. In der allgemeinen Relativitätstheorie muß man nun genau definieren, was unter „Zustand der Welt" eigentlich dabei zu verstehen sei; denn die Werte irgendwelcher physikalischen Parameter lassen sich durch Wechsel des Bezugssystems in andere Werte transformieren, können also nicht in jenem Satze als Bestimmungsstücke des physikalischen Zustandes gemeint sein. *Hilbert* gibt nun genau an, wie man den Zustand definieren muß, damit er einen „physikalischen Sinn" habe, und zeigt, daß dann das Kausalitätsprinzip in vollem Umfange gültig bleibt. Auch diese Frage hat dann *Klein* von seinem allgemeinen, gruppentheoretischen Standpunkte beleuchtet.

Hilbert hat seine Auffassung der Relativitätstheorie in mehreren Vorlesungen bekanntgemacht, wobei er zu immer größerer Eindringlichkeit und Klarheit der Darstellung gelangte. Im letzten Sommersemester hat er sogar ein populäres Kolleg vor einem riesigen Zuhörerkreis gehalten und dabei bewiesen, daß nur der, dem die logische Struktur eines schwierigen Gebietes vollständig durchsichtig ist, dieses vor einem Laienpublikum anschaulich, lebendig und gleichzeitig klar und streng vortragen kann.

Seit *Gauß* und *Weber* ist es eine Göttinger Tradition, daß Mathematik und Physik nicht nebeneinander, sondern miteinander fortschreiten. *Klein* hat diese Tradition besonders energisch gehütet und durch Einbeziehung der technischen Wissenschaften ausgebaut; sein Streben war, die hohe mathematische Forschung aus ihrer Isolierung zu befreien und sie durch Pflege der Anwendungen mit der Praxis, der Technik, zu verbinden, diese befruchtend und gleichzeitig von dieser befruchtet und sozial gestützt. *Hilbert* hat in nicht geringerem Maße im Sinne der Göttinger Überlieferung gewirkt, nur war sein Interesse weniger auf die Praxis, als auf die Prinzipien der Naturerkenntnis gerichtet; darum hat er seine mathematischen Kräfte in den Dienst der modernen Physik gestellt. Was diese ihm zu danken hat, davon sollen diese Zeilen berichten.

Die Bedeutung Hilberts für die Philosophie der Mathematik.

Von Paul Bernays, Göttingen.

Wenn wir die geistigen Beziehungen der mathematischen Wissenschaften zur Philosophie betrachten, wie sie sich seit den Zeiten der Aufklärung entwickelt haben, so bemerken wir mit Befriedigung, daß gegenwärtig das mathematische Denken im Begriff ist, wieder jenen mächtigen Einfluß auf die philosophische Spekulation zu gewinnen, welchen sie bis zur Zeit *Kants* besaß, den sie dann aber auf einmal völlig einbüßte. Jene plötzliche Abwendung von dem mathematischen Denken geschah im Zeichen der allgemeinen Abkehr von dem Geiste der Aufklärungszeit, wie sie sich zu Anfang des 19. Jahrhunderts einstellte.

Jedoch war diese Ablösung der Philosophie von der exakten Wissenschaft nur eine einseitige. Während nämlich die herrschende Philosophie sich ganz der Mathematik entfremdete[1]), entwickelte sich bei den Mathematikern immer mehr eine philosophische Richtung.

Der wesentlichste Grund hierfür war, daß die Mathematik weit über den Rahmen hinaus wuchs, in dem sie sich zu den Zeiten *Kants* noch bewegte. Nicht nur, daß der Bereich der erforschten Tatsachen sich erheblich vergrößerte, sondern die ganze Anlage der Untersuchungen wurde großzügiger und die ganze Methode umfassender. Die Begriffsbildungen erhoben sich zu einer höheren Stufe der Allgemeinheit; die Bedeutung der Formel trat zurück gegenüber begrifflichen Abstraktionen und systematischen Leitgedanken. Ferner auch die Stellung zu den Grundlagen und dem Objekt der mathematischen Wissenschaften änderte sich.

Die Aufgabe der Geometrie wurde weiter gefaßt. Die geometrischen Begriffsbildungen wurden allgemeiner und machten sich immer mehr von der Bindung an die räumliche Vorstellung frei. Und in den neu entstandenen geometrischen Theorien hatte die Raumanschauung nicht mehr die Bedeutung der Erkenntnis-Grundlage, sondern

[1]) **Unter den Philosophen, welche in dieser Hinsicht eine rühmliche Ausnahme machten, ist besonders *Bolzano* zu erwähnen, der als erster die strenge Begründung für die Theorie der reellen Zahlen gegeben hat.**