„Einer der unangenehmsten Punkte in der reichen und belebten Existenz unseres Denkers war der platte Anfall Zöllner's gegen ihn und andere Gelehrte. Ich wusste mir dies nicht zu erklären, und nur später erfuhr man, dass Zöllner durch den unternehmenden Schwindler Slade zum Spiritismus bekehrt worden war. Sein Hass war daher in erster Linie gegen Tyndall gerichtet, der in England eine sehr unternehmende Campagne gegen den Spiritismus geführt hatte, und dann erst gegen Helmholtz, der die Arbeiten Tyndall's ins Deutsche hatte übersetzen lassen und seinen Namen zu der Uebersetzung hergegeben hatte. Er sprach sehr häufig davon; wir hatten auch bald herausgefunden, dass die Lösung der sogenannten spiritistischen Probleme bei den Taschenspielern zu suchen sei. Bosco, der grosse und geniale Schöpfer der modernen Taschenspielkunst, pflegte beim Beginn einer Aufführung zu sagen, dass in seinen Productionen keine ausserordentlichen, übernatürlichen Kräfte ins Spiel kommen, sondern bloss etwas Geschicklichkeit; aber wenn es ihm geglückt wäre, alle Welt zu täuschen, so bäte er sich etwas Anerkennung von Seite des Publikums aus. Und er machte wirklich ganz überraschende Spiele, in der Nähe des Publikums und in vollem Licht, viel überraschendere Spiele, als der ganze Spiritismus je zu Stande gebracht hat.

So oft ein Taschenspieler nach Pontresina kam, konnte er auf Helmholtz's und meine Clientel rechnen. Wir sassen da in den ersten Reihen, und es war ein grosser Wettstreit dann, zu sehen, wer von uns das eine oder andere Spiel zu erklären im Stande war. Oft gelang es uns, oft aber auch nicht. „Das ist eine sehr angenehme geistige Gymnastik", meinte Helmholtz, „und man kann gar nicht wissen, ob wir sie eines Tages nicht gebrauchen werden."

Und ganz damit in Uebereinstimmung hat sich Helmholtz selbst viel später in einem „Suggestion und Dichtung" betitelten Gutachten geäussert:

„Geehrter Herr! Wissenschaftliche Studien über die Frage, die Sie stellen, habe ich nie gemacht; was ich davon weiss, ist mir nur durch Zufall zugetragen worden. Aber ich kenne aus langer Erfahrung die Wundersucht des 19. Jahrhunderts und die Hartnäckigkeit, mit der solcher Glauben auch die handgreiflichsten Nachweise grober Täuschungen überwindet; denn meine Jugend reicht noch in die Zeit zurück, wo der thierische Magnetismus blühte. Seitdem sind viele verschiedene Phasen derselben Geistesrichtung einander gefolgt. Jede einzelne hat nur eine beschränkte Lebensdauer; häufen sich die Enttäuschungen zu sehr, so ändert man eben die Methode.

Wenn Sie mich fragen, warum ich mich nicht eingehender damit befasst habe, so kann ich Ihnen nur antworten, dass meine Zeit immer sehr in Anspruch genommen gewesen ist mit Beschäftigungen, die ich für nützlicher gehalten habe, als wundersüchtige Leute zu kuriren, die nicht kurirt sein wollten. Und andererseits musste ich mir sagen, dass, wenn mir der Nachweis einer Täuschung gelang, ich nicht hoffen durfte, viel Eindruck auf die Gläubigen zu machen. Wenn es mir aber nicht gelang, so hätte ich ihnen ein vortreffliches Argument gegen mich in die Hände gespielt. Und da ich durchaus nicht im Stande bin, die Mehrzahl der Kunststücke, die mir ein gewandter Taschenspieler vorführt, zu entziffern, so kann ich auch nicht unternehmen, alle magnetischen oder spiritistischen oder hypnotischen Wunder, die man mir etwa zeigen sollte, zu erklären; um so weniger, als meistentheils die gesellschaftliche Stellung oder das Geschlecht der Mitwirkenden eine wirklich überzeugende Untersuchung verbieten; schliesslich auch oft genug der geschickte Vorwand gebraucht wird, dass die Anwesenheit eines hartnäckig Ungläubigen den Zauber störe.

Mich hat bei diesen Dingen eigentlich immer nur das psychologische Phänomen der Gläubigkeit interessirt, und die Rolle des Täuschenden habe ich deshalb zuweilen beim Tischrücken oder Gedankenlesen mit Erfolg übernommen, natürlich mit dem späteren Eingeständniss, dass ich der Sünder gewesen war.

Wenn Sie nach diesen Erklärungen nun noch meine private Meinung interessirt, so kann ich mich nur ganz und voll meinem Freunde und Collegen Herrn E. du Bois-Reymond anschliessen. — Dass übrigens in den hypnotischen Erscheinungen ein Kern von Wahrheit steckt, will ich nicht leugnen. Nur was davon wahr ist, würde kaum sehr wunderbar erscheinen.

Ueber die Anwendung solcher mystischer Einwirkungen in der Poesie kann ich nur als Zuschauer und Leser reden. Da finde ich, dass ich nur für zurechnungsfähige Seelen Verständniss und Mitfühlen habe. Zaubermittel sind mir nicht anstössig, wenn sie nur eine abgekürzte Darstellung eines natürlichen Seelenvorgangs geben sollen, der in Wirklichkeit mehr Zeit und Zwischenstadien fordern würde. Wo das nicht zutrifft, erlischt meine Theilnahme an dem Vorgange sogleich, wofür die theoretische Erklärung ja auch nahe liegt."

Aus der Vorrede zu dem Thomson'schen Werke möge noch die Gegenüberstellung des Newton'schen und Weber'schen Gesetzes und die Kritik des letzteren hervorgehoben werden, wie er sie genauer in seinen elektrodynamischen Arbeiten durchführt. Es sind aber auch die allgemeinen Betrachtungen über die Scheidung der inductiven und deductiven Methode in der Forschung von hohem Interesse, in denen er die letztere nicht bloss als eine berechtigte, sondern als eine geforderte bezeichnet, wenn es sich um die Prüfung der Zulässigkeit einer Hypothese handelt, die darauf beruht, dass wir uns alle Folgerungen, welche sich aus dieser ergeben, zu entwickeln suchen, um sie mit den beobachtbaren Thatsachen zu vergleichen. Den Schluss der Vorrede bilden einige geistvolle Bemerkungen über die von Thomson aufgestellte, von Helmholtz als nicht unwahrscheinlich zugegebene Hypothese, dass organische Keime in den Meteorsteinen vorkommen und den kühl gewordenen Weltkörpern zugeführt werden.

Allmählich wenden sich nun seine wissenschaftlichen Interessen und Forschungen von der Physiologie immer mehr, fast ausschliesslich der Physik und Mathematik zu, und es war nur natürlich, dass in Helmholtz der Wunsch aufkam, auch seine Lehrthätigkeit mehr nach dieser Seite hin verlegen zu können.

Im Sommer 1868, während seine Frau zur Kräftigung und Heilung des Sohnes Robert an der Ostsee weilte, und Helmholtz selbst durch Vorlesungen, Laboratorium und wissenschaftliche Arbeiten aufs Aeusserste in Anspruch genommen, sogar in den freien Stunden seinem Sohne Richard Unterricht in der ebenen Trigonometrie ertheilte, um diesen für das Polytechnicum in Stuttgart vorzubereiten, spielten sich die Verhandlungen mit Bonn zur Uebernahme der physikalischen Professur ab, welche ihm viel Aufregungen und Unannehmlichkeiten verursachten.

Schon einmal war die Preussische mit der Badischen Regierung in einen Wettstreit um den Besitz von Helmholtz gerathen, und es war, als Helmholtz von Bonn nach Heidelberg berufen wurde, nicht nur eine Vermuthung von du Bois gewesen, dass von hoher Stelle in die Verhandlungen eingegriffen worden sei. In der That hatte am 17. April 1858 der damalige Prinzregent, der nachherige Kaiser Wilhelm, auf Veranlassung seiner Gemahlin, der späteren Kaiserin Augusta, an den Staatsminister v. Raumer das nachfolgende Schreiben gerichtet:

„Bevor Ich auf Ihren Bericht vom 10. v. M. dem ordentlichen Professor der Anatomie in der medicinischen Facultät zu Bonn Dr. Helmholtz die von ihm nachgesuchte Entlassung aus seinem bisherigen Dienstverhältniss ertheile, sehe Ich in Betracht, dass nach Ihrem Bericht vom 15. Juni

v. J. sein Abgang als ein empfindlicher Verlust für die Universität zu betrachten ist, Ihrer Aeusserung entgegen, ob es nicht möglich ist, die seinerseits mit der Grossherzoglich Badischen Regierung getroffene Uebereinkunft rückgängig zu machen, und eventuell welche Bedingungen er für sein Verbleiben stellt, sowie an welchen seinerseits gestellten Forderungen die im vorigen Jahr von Ihnen dieserhalb mit ihm gepflogenen Unterhandlungen gescheitert sind."

Und bald darauf, am 28. Mai 1858, nachdem der Minister eine schriftliche Darlegung der Verhandlungen gegeben, war eine weitere Ordre gefolgt:

„Ew. Excellenz beehre ich mich in vorläufiger Erwiderung des gefälligen Schreibens vom 21. d. M. ganz ergebenst zu benachrichtigen, dass ich den königlichen Gesandten von Savigny in Carlsruhe mit der erforderlichen Anweisung versehen habe, um die Entbindung des Professor Dr. Helmholtz in Bonn von dem der Grossherzoglich Badischen Regierung wegen seiner Berufung an die Universität in Heidelberg gegebenen Versprechen zu vermitteln, und mir vorbehalte, Ew. Excellenz von dem Erfolge demnächst Mittheilung zu machen."

Die Badische Regierung sah sich jedoch damals nicht veranlasst, dem Wunsche Preussens zu willfahren und Helmholtz von dem der Regierung gegebenen Worte zu entbinden; sie wusste zu gut, welche gewaltige Geisteskraft sie für Heidelberg gewonnen und konnte sich auf das von Bunsen am 28. Mai 1857 an das Grossherzogliche Ministerium auf dessen Ansuchen gerichtete Schreiben berufen:

„. . . Die neuere Richtung der Physiologie ist weit entfernt, die speciellen Ansichten einer speciellen Schule zu vertreten, sie unterscheidet sich vielmehr von der älteren nur dadurch, dass sie nicht mehr die principiellen Grundlagen der Physiologie anderen Naturwissenschaften auf Treu und Glauben entlehnt, sondern sich dieselben auf dem kritischeren Wege eigener experimenteller und mathematischer Forschungen selbst zu schaffen sucht.

Unter den jüngeren Persönlichkeiten, welche in dieser Richtung auf die Entwickelung der Physiologie den wesentlichsten Einfluss ausgeübt haben, weiss ich nur vier zu bezeichnen: 1. Helmholtz, 2. Brücke, 3. du Bois-Reymond, 4. Ludwig.

Von den Genannten muss Helmholtz unzweifelhaft als der genialste, begabteste und vielseitig gebildetste gelten, wie schon das beigelegte Verzeichniss seiner Schriften erkennen lässt. Unter denselben finden sich Arbeiten von klassischer Bedeutung, die sogar manchen maassgebenden Einfluss auf die neuere Richtung anderer exacter Naturwissenschaften ausgeübt haben. Seine Lehrthätigkeit ist eine ausgezeichnete, sein persönlicher Vortrag weniger glänzend als gründlich, geistreich und anziehend . . .“

Und nun war Helmholtz bereits zehn Jahre in Heidelberg thätig gewesen, hatte als grösster Naturforscher seiner Zeit mit Bunsen und Kirchhoff den Ruhm der Universität getragen, fühlte sich glücklich im Kreise seiner Familie an der Seite einer hochbedeutenden Frau, hatte grossen und anregenden Verkehr mit vielen ausgezeichneten Collegen, welche zu den bedeutendsten Forschern auf den verschiedenen Gebieten menschlichen Wissens gehörten — es musste ein schwer wiegender Umstand hinzukommen, wenn er den Gedanken erwägen sollte, Heidelberg zu verlassen.

Durch den Tod Plücker's in Bonn war die Professur der Physik und zugleich eine Professur der Mathematik erledigt, und es wandte sich am 28. Mai 1868 der Curator der Universität Beseler mit der Anfrage an Helmholtz, ob es möglich sein würde, ihn für die Professur der Physik zu gewinnen, „da mit seltener Einmüthigkeit in den hiesigen akademischen Kreisen, nicht bloss unter den Vertretern der mathematischen und der Naturwissenschaften, der lebhafte Wunsch zu Tage trete“, dass Helmholtz der Nachfolger

Plücker's werde. In der interessanten und charakteristischen Antwort sagt Helmholtz u. a.:

„Die Physik war eigentlich von jeher die Wissenschaft, der sich mein Interesse hauptsächlich zugewendet hatte; zur Medicin und durch sie zur Physiologie wurde ich wesentlich durch äussere zwingende Umstände geführt. Was ich in der Physiologie geleistet habe, basirt wesentlich auf physikalischem Boden. Die jungen Leute, deren praktische Arbeiten ich gegenwärtig zu leiten habe, sind überwiegend Mediciner, und meist nicht so vollständig in der Mathematik und Physik vorbereitet, um aufnehmen zu können, was ich unter den Dingen, die ich vielleicht lehren könnte, als das Beste betrachten würde. Andererseits sehe ich, dafs die wissenschaftliche und namentlich mathematische Physik in Deutschland in der jüngeren Generation nicht mehr recht vorwärts schreitet. Die wenigen grossen Namen dieses Faches, welches die eigentliche Basis aller rechten Naturwissenschaft ist, sind alt oder fangen an, in die ältere Generation einzurücken, ohne dass entsprechender Nachwuchs da ist, und ich muss mir deshalb sagen, dass, wenn ich in diesem Fache eine Einwirkung auf die Schüler gewinnen könnte, ich damit vielleicht Wichtigeres leisten würde als in der Physiologie, wo jetzt eine rüstig vorwärts arbeitende Schule ausgebildet ist. So wäre wohl ein Ziel da, welches es lohnte, noch einmal die neue Arbeit einer neuen Stellung auf mich zu nehmen, statt in dem bisher beschrittenen Wege gemächlich fortzuarbeiten. Ich würde zu dem Ende aber neben der Experimentalphysik, welche die populäre Vorlesung ist, jedenfalls den Unterricht in der mathematischen Physik und die Leitung praktischer Arbeiten mit übernehmen müssen. Vorlesungen über reine Mathematik würde ich nicht wohl übernehmen können; in denen über mathematische Physik würde ich das Mathematische nur als Mittel behandeln, nicht als Zweck. Wo möglich würde ich daneben auch noch Physiologie des Auges und Ohres vortragen, doch möchte ich in dieser Beziehung keine Verpflichtung übernehmen."

Zugleich schreibt er am 10. Juni an Pflüger in Bonn: „Ich bin erst im Verlaufe der Verhandlungen darauf aufmerksam gemacht worden, dass Sie die Physiologie der Sinne als besonderes Colleg lesen. Ich hatte von Anfang her angenommen, dass Sie sie nur implicite in dem allgemeinen Colleg über Physiologie vortrügen, und dass es Ihnen keine wesentliche Störung sein würde, wenn ich über Auge und Ohr eine speciellere Vorlesung hielte, und in dieser Voraussetzung hatte ich mich gegen Beseler geäussert."

Pflüger bot sogleich in freundschaftlichster und entgegenkommendster Weise eine Helmholtz angenehme Regelung der Verhältnisse an, und dieser orientirte sich dann noch persönlich über die dortigen Verhältnisse, als er am 3. August zum Jubiläum der Universität nach Bonn ging.

Sehr warm tritt nun Beseler in einem Schreiben vom 4. August 1868 bei dem Minister von Mühler für die Berufung von Helmholtz ein:

„Die philosophische Facultät schlägt für den Lehrstuhl der Physik in erster Linie Helmholtz vor; die verschiedenen Voten unterscheiden sich in dieser Beziehung nur dadurch, dass sie in der Methode und in der Wärme seines Lobes variiren. Die medicinische Facultät hält sich verpflichtet, im Interesse ihrer Studirenden Ew. Excellenz auf das Angelegentlichste zu bitten, keine Opfer zu scheuen, um denselben für die physikalische Professur zu erwerben. . . . Dass sein Weltruhm seit Jahren begründet ist, dass bei seiner Erforschung der Natur und ihrer Kräfte die physikalische Seite in den Vordergrund tritt, dass seine Erwerbung für eine preussische Universität ein Ruhmestitel für die preussische Verwaltung, seine Uebersiedelung nach Bonn zur Uebernahme des vacanten Lehrstuhles für diese Universität ein hohes Glück nicht bloss für die Cultur der

Naturwissenschaften sein würde, steht fest. Von der ausserordentlichen Bedeutung des Mannes für die Wissenschaft im eminenten Sinne dürfte z. B. der Umstand bürgen, dass der Philosoph Trendelenburg sich in neuerer Zeit berufen hält, sich den mathematischen Studien wieder zuzuwenden, um Helmholtz in seinen Schriften folgen zu können.“

Und das beigelegte Gutachten der medicinischen Facultät schliesst mit den schönen Worten:

„Es muss jeder zur Einsicht gelangen, dass er nur etwa mit Leibniz verglichen werden kann, der ebenso tief, ebenso umfassend und ebenso erhaben in seinen Speculationen war.“ Bernard

Nachdem sich die Verhandlungen längere Zeit hingezogen, weil der preussische Minister zunächst die definitive Feststellung des Staatshaushalts-Etats für 1869 abwarten wollte, und Helmholtz inzwischen am 16. September den Titel eines Grossherzoglich Badischen Geheimrathes II. Classe, zur selben Zeit das Commandeurkreuz des Zähringer Löwen erhalten hatte, fordert Beseler am 26. December 1868 Helmholtz zu einer mündlichen Verhandlung in Mainz auf und wendet sich zugleich nochmals an den Minister:

„. . . . Ich lege den allergrössten Werth darauf, dass ich zu einem solchen definitiven Abschluss in den Stand gesetzt werde; denn 1. ist Helmholtz ein sehr liebenswürdiger, aber auch im edlen Sinne ein stolzer Mann. Seit einem halben Jahr ist von seiner Berufung nach Bonn in den weitesten Kreisen die Rede; ich halte es für leicht möglich, dass es ihn verstimmen würde, wenn, nachdem eine officielle Verhandlung mit ihm eingeleitet worden, der Unterhändler nicht zum definitiven Abschluss ermächtigt wäre. 2. . . Ich kann nach den mir von den verschiedensten Seiten zugegangenen Nachrichten ohne Uebertreibung sagen, dass die Gelehrtenwelt mit Spannung darauf wartet, ob die Königl. Preussische Regierung den Mann für Bonn zu gewinnen gewusst hat. Es wäre die erste Berufung in dem zweiten

Säculum der Universität und eine so glänzende, wie sie jemals an eine preussische Universität vorgekommen."

Die Unterredung mit Beseler führte nicht zu dem gewünschten Resultate, da die preussische Regierung nicht gleichen Schritt zu halten wusste mit dem liberalen Entgegenkommen des badischen Ministers. Am 2. Januar 1869 richtet Jolly ein sehr verbindliches Schreiben an Helmholtz:

„.... Ich hoffe jetzt mit Sicherheit, es wird gelingen, Sie in dem schönen Heidelberg festzuhalten. So gern wir uns sonst der preussischen Führung fügen, so ist es doch in dem vorliegenden Falle für uns eine angenehme Pflicht, dem Berliner Cabinet den Sieg auf's Aeusserste streitig zu machen, und ich darf hinzufügen, dass es mir, dessen geistiges Leben in der Universität Heidelberg wurzelt, persönlich wahrhaft schmerzlich gewesen wäre, während ich die Geschäfte zu leiten habe, sie ihrer ersten Zierde beraubt zu sehen."

Die Erfüllung aller, freilich sehr bescheidenen Wünsche von Seiten der badischen Regierung, sowie die Wünsche und Neigungen seiner Familie, bestimmten Helmholtz, in Heidelberg zu bleiben. Du Bois hingegen drängte ihn, den Ruf als Physiker nach Bonn anzunehmen:

„Weil, wenn Du in Bonn Physiker wärest, bei der binnen wenigen Jahren hier unfehlbaren Vacanz in diesem Fache, Du ebenso unfehlbar hierher gerufen werden würdest, und ich dies für das Gemeinwesen wie für mich für ein sehr grosses Glück halten würde."

Darauf konnte er am 14. Januar nur antworten:

„Hier ist alles officiell fertig gemacht, ein Fackelzug gehalten u. s. w., und Olshausen unterhandelt schon mit Clausius, was mich freut."

Am 27. Januar schreibt Helmholtz an Ludwig:

„Die Entscheidung über meine Bonner Berufung hat sich drei Vierteljahre hinausgesponnen, endlich habe ich abgelehnt. Ich ging anfangs gern auf den Plan ein, künftig

Physik zu lesen, weil ich voraussetzte, dass ich die Physik in allen Theilen mit vollständig selbständigem Urtheil hätte vortragen können, während unsere Physiologie in den Handgriffen und Methoden so aus einander zu gehen anfängt, dass niemand mehr in allen Einzelheiten sattelfest sein kann. Freilich habe ich mir oft auch dagegen sagen müssen, dass eben deshalb die Physiologie das ruhmwürdigere Feld sei, und dass es der Menschheit vielleicht nützlicher, wenn auch für uns weniger bequem ist, wenn wir unsere Kräfte in dieser Beziehung verwenden. . . . . In den letzten Tagen des December verlangte der Curator von Bonn, mit mir mündlich zu verhandeln, um mir Mindergebote zu thun, und erst, nachdem ich erklärt hatte, mich nun überhaupt auf nichts mehr einlassen zu wollen, kam heraus, dass er ermächtigt war, mir meine frühere Forderung zu bewilligen. . . . . Schliesslich siegte, wenn ich so sagen darf, das Heimweh für Heidelberg, d. h. für seine moralische Atmosphäre und das Bedenken, aus dem Ministerium Jolly unter das Ministerium Mühler zu treten. . . . . Aber am Ende, wenn die ernstesten Verhältnisse des Lebens in's Spiel kommen, haben auch die Verpflichtungen gegen die Freunde ihre Grenzen. Die Badische Regierung, die ich eigentlich in der Führung der Verhandlungen benachtheiligt hatte der Preussischen gegenüber, war in ihrer Bereitwilligkeit, für mich fast unverhältnissmässige Opfer zu bringen, das gerade Gegentheil der Preussischen.“

Freilich sollte schon wenige Jahre später Preussen dennoch obsiegen.

Mitten in die Verhandlungen hinein fällt die Geburt seines Sohnes Friedrich Julius am 15. October 1868:

„Von Geburt an“, schreibt Frau v. Schmidt-Zabiérow, „war auch er ein schwächliches Kind, das nur durch unablässigste Sorgfalt und Pflege am Leben erhalten werden konnte, und dessen geistige wie körperliche Entwickelung die Quelle ununterbrochener Sorge für die Eltern war und blieb. Es bedurfte der beispiellosen Widerstandsfähigkeit meiner Schwester, um dem doppelten Kummer der Krankheit ihrer beiden Söhne nicht zu erliegen, die Verdüsterung des Lebens ihres Mannes hintanzuhalten. Persönliches Leid sollte seine Arbeitskraft nicht beeinträchtigen, alltägliche Dinge sollten ihm ferngehalten werden. Dieses Bestreben lag dem Thun und Lassen meiner Schwester zu Grunde. Während sie sich in schwierigen Fällen seinen Rath erbat und sich seinem Urtheil unterwarf — „mir steigen überall Bedenken auf, wo ich Dich nicht habe, um meinen Ideen das Fundament zu geben“ — so verschonte sie ihn doch mit Klagen über Unabänderliches. Ihr fröhliches, warmes Temperament blieb nicht ohne Rückwirkung auf seine oftmals allem Irdischen entrückte Denkerseele.“

Um diese Zeit tritt in der Bethätigung der enormen Schaffenskraft von Helmholtz eine entschiedene Wendung zu physikalischen, mathematischen und philosophischen Problemen der schwierigsten Art ein.

Seine akustischen Forschungen hatten ihm eine unmittelbare Veranlassung gegeben, zu seinen früheren hydrodynamischen Untersuchungen zurückzukehren; die neu erhaltenen Resultate legte er am 23. April 1868 der Berliner Akademie in der Arbeit „Ueber discontinuirliche Flüssigkeitsbewegungen“ vor. Die hydrodynamischen Gleichungen für das Innere einer nicht der Reibung unterworfenen Flüssigkeit, deren Theile keine Rotationsbewegung besitzen, liefern dieselbe partielle Differentialgleichung, welche für stationäre elektrische Ströme in Leitern von gleichmässigem Leitungsvermögen besteht. In Wirklichkeit existiren jedoch wesentliche Unterschiede zwischen der Stromvertheilung einer tropfbaren Flüssigkeit und der Elektricität, welche besonders auffallend sind, wenn die Strömung durch eine Oeffnung mit scharfen Rändern in einen weiteren Raum eintritt. Während die Stromlinien der Elektricität von der Oeffnung aus sogleich nach allen Richtungen aus einander gehen, bewegt sich Wasser wie Luft von der Oeffnung aus anfänglich in einem compacten Strahle vorwärts, der sich dann in geringerer oder grösserer Entfernung in Wirbel aufzulösen pflegt. Die Untersuchung der bei den Orgelpfeifen durch einen continuirlichen Luftstrom erregten periodischen Bewegung hatte Helmholtz gelehrt, dass eine solche Wirkung nur durch eine discontinuirliche Art der Luftbewegung hervorgebracht werden könne.

Während nun für die hydrodynamischen Gleichungen bisher stets Geschwindigkeiten und Druck der strömenden Theilchen als continuirliche Functionen der Coordinaten behandelt wurden, erkannte Helmholtz, dass bei einer der Reibung nicht unterworfenen tropfbaren Flüssigkeit auf beiden Seiten einer durch das Innere derselben gelegten Fläche auch tangentielle Geschwindigkeiten von endlichem Grössenunterschiede stattfinden können, wenn nur die senkrecht zur Fläche gerichteten Componenten der Geschwindigkeit und der Druck an beiden Seiten derselben gleich sind. Nun ist aber im Innern einer Flüssigkeit eine Ursache vorhanden, welche Discontinuität der Bewegung erzeugen kann, indem für jeden beliebigen positiven Werth des Druckes die Dichtigkeit der Flüssigkeit sich continuirlich mit ihm ändert, sowie der Druck aber negativ wird, eine discontinuirliche Veränderung der Dichtigkeit eintritt und die Flüssigkeit aus einander reisst.

Da nun in einer bewegten incompressibelen Flüssigkeit die Verminderung des Druckes der lebendigen Kraft der bewegten Wassertheilchen direct proportional ist, so wird, wenn diese eine bestimmte Grösse überschreitet, der Druck negativ werden, und die Flüssigkeit zerreissen. Die dem Differentialquotienten des Druckes proportionale beschleunigende Kraft wird an dieser Stelle discontinuirlich, und es wird sich bei der Bewegung der Flüssigkeit an einer solchen Stelle vorüber eine Trennungsfläche bilden. Eine einfache Ueberlegung zeigt, dass jede geometrisch vollkommen scharf gebildete Kante, an welcher Flüssigkeit vorbeifliesst, selbst bei der mässigsten Geschwindigkeit der übrigen Flüssigkeit, dieselbe zerreissen und eine Trennungsfläche herstellen muss. Nun ist aber die Bewegung im ganzen Inneren einer incompressibelen Flüssigkeit, deren Theilchen keine Rotationsbewegung haben, vollständig bestimmt, wenn die Bewegung ihrer ganzen Oberfläche und ihre inneren Discontinuitäten gegeben sind. Es handelt sich daher bei äusserer fester Begrenzung der Flüssigkeit nur darum, die Bewegung der Trennungsfläche und die Veränderungen der Discontinuität an derselben kennen zu lernen; als Grenzbedingungen für eine innere Trennungsfläche der Flüssigkeit sind zu betrachten, dass der Druck auf beiden Seiten der Fläche gleich sein muss, und ebenso die normal gegen die Trennungsfläche gerichtete Componente der Geschwindigkeit. Die Bewegung der Trennungsfläche wird nun nach den früher für die Bewegung der Wirbelflächen festgestellten Regeln bestimmt.

Es ergiebt sich, dass eine solche Trennungsfläche nicht entstehen und nicht verschwinden kann, und dass die auf der Trennungsfläche liegenden Trennungsfäden längs der Trennungsfläche mit einer Geschwindigkeit fortschwimmen, welche das Mittel aus den an beiden Seiten der Fläche bestehenden Geschwindigkeiten ist. Es kann sich somit eine Trennungsfläche immer nur nach der Richtung hin verlängern, nach welcher der stärkere von den beiden in ihr sich berührenden Strömen gerichtet ist. Versuche und Theorie geben übereinstimmende Resultate für unverändert bestehende Trennungsflächen in stationären Strömungen, d. h. für den Fall, dass längs der Trennungsfläche von ruhendem und bewegtem Wasser der Druck in der bewegten Schicht derselbe ist wie in der ruhenden, somit die tangentielle Geschwindigkeit der Wassertheilchen in der ganzen Ausdehnung der Fläche constant ist. Es gelingt Helmholtz auf diesem Wege mit Hülfe functionentheoretischer Principien zum ersten Male die Gestalt eines freien Flüssigkeitsstrahles für den speciellen Fall zu bestimmen, dass der Strom aus einem weiten Raum in einen engen Canal übergeht, und unter der Voraussetzung, dass keine äusseren Kräfte auf die incompressible Flüssigkeit wirken, dass ferner ein Geschwindigkeitspotential existirt, die Strömungen stationäre sind und die Bewegung einer festen Ebene parallel ist. Die Resultate geben ihm zu weiteren wichtigen Bemerkungen über elektrische Vertheilungsaufgaben und die Aufsuchung bestimmter Potentialfunctionen Anlass.

Wenn er bei Uebersendung seiner Abhandlung über eine Klasse hydrodynamischer Gleichungen am 8. Januar 1858 an Borchardt geschrieben:

> „... Sie ist mehr für mathematische als physikalische Leser eingerichtet, und ihr Nutzen besteht mehr darin, dass man eine Uebersicht der den hydrodynamischen Gleichungen entsprechenden Bewegungen erhält, welche man anwenden kann, um bei Bewegungen wirklichen Wassers zu erkennen, welche Eigenthümlichkeiten seiner Bewegung von anderen Umständen influirt werden, die in den hydrodynamischen Gleichungen nicht berücksichtigt sind, als dass man viele directe Anwendungen der neuen Integralformen auf wirkliche Vorgänge machen könnte“,

so bieten die Resultate der eben erwähnten Arbeit Gelegenheit zur Anwendung auf viel besprochene Erscheinungen von besonderem Interesse, und er ergänzt in der That seine hydrodynamischen Untersuchungen durch eine am 5. März 1869 dem naturhistorisch-medicinischen Verein in Heidelberg vorgelegte Arbeit „Zur Theorie der stationären Ströme in reibenden Flüssigkeiten“.

Es war von W. Thomson behauptet worden, dass ein Körper, welcher in einer nicht reibenden Flüssigkeit nahe einer senkrechten Wand fällt, von dieser angezogen wird und zu ihr hineilt. Im Gegensatz hierzu zeigten die in dem Laboratorium von Helmholtz angestellten Versuche über die Bewegungen und die Vertheilung feiner suspendirter fester Körperchen, dass nicht nur in Capillarröhren, sondern auch in viel weiteren Röhren von 1 bis 5 cm Durchmesser mikroskopisch kleine Körperchen immer gegen die Mitte des Stromes hinstreben. Da aber schwerere Körper schneller in der Flüssigkeit fallen als leichtere, so erhalten bei ersteren diejenigen Druckunterschiede, welche vom Quadrat der Geschwindigkeit abhängen, einen grösseren Einfluss, und man hört in der That eine Bleikugel mehrmals an die Wand anschlagen, bevor sie den Boden erreicht. Die Abweichungen davon bei geringeren Geschwindigkeiten schienen vom Einfluss der Reibung herzurühren, und es hatte den Anschein, dass, wenn man nur so kleine Geschwindigkeiten in Betracht zog, dass nur die Glieder erster Dimension zu berücksichtigen waren, die schwimmenden Körper sich nur an solchen Orten der Flüssigkeit hielten, wo ihre Anwesenheit die geringste Vermehrung der Reibung der Flüssigkeit hervorbrachte.

Helmholtz untersucht nun zur genaueren Feststellung dieser Thatsachen die schon früher behandelten hydrodynamischen Gleichungen mit Berücksichtigung der Reibung, und entwickelt zunächst durch Integration einer aus denselben unmittelbar ersichtlichen Beziehung die Zunahme der lebendigen Kraft in der einen bestimmten Raum füllenden Flüssigkeitsmasse. Er findet durch Deutung des analytischen Ausdruckes, dass diese gleich ist der während eines unendlich kleinen Zeittheilchens von denjenigen äusseren Kräften geleisteten Arbeit, welche auf das Innere der Wassermasse wirken und welche die festen Körper zu bewegen streben, weniger derjenigen Menge lebendiger Kraft, welche während dieses kleinen Zeittheilchens durch die Reibung im Innern der Flüssigkeit vernichtet, also in Wärme verwandelt worden ist.

Unter der Voraussetzung eines stationären Stromes und unter der Annahme, dass, wo die Flüssigkeit eine feste Wand berührt, ihre oberflächlichen Theile fest an dieser haften, dass dagegen an der Oberfläche beweglicher schwimmender Körper Veränderungen der Geschwindigkeit der Flüssigkeitstheilchen stattfinden, welche den Bewegungsbedingungen der berührenden festen Körper entsprechen, folgert er aus den früher gewonnenen Resultaten die Natur der in Frage kommenden Bewegung. Er findet mit Hülfe bekannter Principien für die Variation von Integralen mit einer gegebenen Beschränkung — welche hier der analytische Ausdruck für die Incompressibilität der Flüssigkeit bildet —, dass bei verschwindend kleinen Geschwindigkeiten und stationärem Strome die Strömungen in einer reibenden Flüssigkeit sich so vertheilen, dass der Verlust an lebendiger Kraft durch die Reibung ein Minimum wird, vorausgesetzt, dass die Geschwindigkeiten längs der Grenzen der Flüssigkeiten als fest gegeben betrachtet werden. Daraus konnte er folgern, dass ein Körper, der in einer reibenden, in langsamem stationärem Strome fliessenden Flüssigkeit schwimmt, im Gleichgewicht ist, wenn die Reibung im stationären Strome ein Minimum ist. Dasselbe findet auch statt, wenn man längs der Oberfläche des schwimmenden Körpers die Werthe der Geschwindigkeiten der Wassertheilchen so variirt, wie sie verändert werden würden, wenn eine der verschiedenen möglichen Bewegungen des Körpers factisch einträte.

Helmholtz hatte gehofft, mit Hülfe dieser Sätze die Abweichungen vom Thomson'schen Gesetze unter der Annahme kleiner Geschwindigkeiten erklären zu können, musste sich aber davon überzeugen, dass zunächst erst noch ähnliche Sätze aufgestellt werden müssen, für welche die quadratischen Glieder der Geschwindigkeiten nicht vernachlässigt werden.

Noch in demselben Jahre 1868 setzte er aber die naturwissenschaftliche und mathematische Welt durch viel weitergreifende und ganz fundamentale Untersuchungen in Staunen, welche er zunächst in einem Abriss dem naturwissenschaftlich-medicinischen Verein am 22. Mai unter dem Titel „Ueber die thatsächlichen Grundlagen der Geometrie“ vorlegte, und deren Ausführung in der der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften überreichten Abhandlung „Ueber die Thatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen“, erschien. Die wichtigsten Resultate derselben suchte Helmholtz später in einem im Docentenverein in Heidelberg im Jahre 1870 gehaltenen Vortrage „Ueber den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome“ in einer auch den Nicht-Mathematikern verständlichen Form darzulegen; der in the Academy ebenfalls im Jahre 1870 erschienene Aufsatz „the axioms of geometry“ giebt nur die Uebersetzung einiger Abschnitte des letzterwähnten Vortrages. Diese Untersuchungen, in Verbindung mit der berühmten Arbeit von Riemann „Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen“, welche als Habilitationsschrift am 10. Juni 1854 erschien, waren bahnbrechend für die Entwickelung der mathematisch-philosophischen Anschauungen der zweiten Hälfte des vorigen Jahrhunderts.

Schon in sehr früher Zeit hatte Helmholtz angefangen, sich mit der philosophischen Analyse der mathematischen und physikalischen Grundbegriffe zu beschäftigen, und es mag als Einleitung zu der Besprechung seiner Arbeiten über die Axiome der Geometrie, Arithmetik und Mechanik hier eine in hohem Grade interessante Aufzeichnung eine Stelle finden, welche noch einige Jahre vor der Veröffentlichung seiner Schrift über die Erhaltung der Kraft erfolgte und nicht nur Zeugniss ablegt von dem jugendlichen Ringen nach Klarheit der Grundbegriffe, sondern uns auch schon die Wege andeutet, welche Helmholtz dreissig Jahre später mit so bahnbrechendem Erfolge eingeschlagen.

„Naturwissenschaft hat zum Objecte denjenigen Inhalt unserer Vorstellungen, welcher von uns als nicht durch die Selbstthätigkeit unseres Vorstellungsvermögens erzeugt angeschaut wird, d. h. also das als wirklich wahrgenommene. Entweder giebt sie nur eine geordnete Uebersicht alles Empirischen (Naturbeschreibung und Experimentalphysik), wo dann nur die Ordnung aus einem Zweck construirt, d. h. wissenschaftlich ist, oder sie sucht die Gründe der Facta zu erschliessen, d. h. sie sucht die Begriffe, aus welchen sich die einzelnen bestimmten empirischen Wahrnehmungen ableiten lassen; sie sucht also das Wirkliche zu verstehen (wissenschaftliche Physik).

Diese Naturbegriffe werden erschlossen, theils aus dem Factum allein, dass es überhaupt bestimmte Wahrnehmungen gebe, die nicht durch unsere Selbstthätigkeit hervorgebracht sind, theils aus einzelnen bestimmten empirischen Wahrnehmungen selbst. Das System der ersteren giebt die allgemeinen oder reinen Naturwissenschaften (Zeitlehre, Geometrie, reine Mechanik), das der letzteren die theoretische Physik. Das Gemeinsame der allgemeinen Naturbegriffe wird sein: dass sie und ihre Folgerungen aller Naturanschauung zum Grunde liegen, und ohne sie keine gedacht werden kann, dass sie also in dieser Hinsicht die allgemeine und nothwendige Form der Naturanschauung sind, daher auch die Gewissheit ihrer Sätze eine absolute ist, während sich die der besonderen Naturbegriffe immer nur so weit erstreckt, um auszusagen, dass alle bis jetzt bekannten Facta ihnen entsprechen. Die allgemeinen Begriffe, nur hergeleitet aus der Möglichkeit irgend einer Naturanschauung, dürfen ferner nicht die Möglichkeit irgend einer empirischen Combination von Wahrnehmungen beschränken, d. h. es darf aus ihnen durchaus kein empirisches Factum oder Gesetz ableitbar sein, sondern sie können uns nur eine Norm für unsere Erklärungen geben.

Hülfssätze. Die möglich denkbaren Verbindungen der hier betrachteten Vorstellungsobjecte fallen unter die allgemeinen Kategorien möglicher Denkverbindungen überhaupt. Sie sind folgende:

I. Beziehung eines Vorstellungsobjectes auf das Vorstellungsvermögen. (Modalität; Objecte wahrgenommen oder vorgestellt.)

II. Beziehung eines Objectes auf ein anderes. Diese Beziehung wird gesetzt

1. als eine von unserem Vorstellen unabhängige, äusserlich wirkliche (Causalität).
2. als eine nur vorgestellte (Vergleichung)
    a) von gleichartigen Objecten (Quantität),
    b) von ungleichartigen (Qualität).

Gleich in einer Beziehung ist nämlich ein Object einem anderen, wenn es überall, wo das Resultat einer Combination nur in dieser Beziehung betrachtet wird, für das andere gesetzt werden kann.

Gleichartig in einer Beziehung, wenn beide in lauter, unter sich in dieser Beziehung gleiche Theile zerlegt werden können.

Ein Object, der Quantität nach betrachtet, heisst Grösse; als Grösse kann demnach jedes Object betrachtet werden, welches in gleiche oder gleichartige Theile zerlegt gedacht werden kann. Messen heisst, die Menge solcher Theile bestimmen; eine bestimmte Menge heisst Zahl, ein einzelner Theil die Maasseinheit.

Die Grössen sind denkbar entweder von der Art, dass fortgesetzte Theilung auf Theile führt, die nicht weiter in gleichartige zertheilt werden können (aggregirte Grössen), oder dass keine Grenze der Theilung existire (stetige Grössen). Ein logischer Widerspruch liegt in der unendlichen Theilbarkeit nicht, denn diese soll nur als möglich gedacht, nicht wirklich ausgeführt werden, wozu allerdings eine unendlich lange Zeit nöthig sein würde; ebenso wenig in dem Gedanken eines stetigen Wachsens durch unendlich viele unendlich nahe Stufen.

Die Wissenschaft von der Verbindung der Grössen der Quantität nach ist die Arithmetik; sie wird rein nach den Gesetzen der gemeinen Logik aus den hier aufgestellten Begriffen entwickelt. Sie führt auf die bekannten Zahlformen der positiven und negativen, ganzen und gebrochenen (mit Einschluss der irrationalen, d. h. gebrochenen mit ∞ grossem Nenner), reellen und imaginären Zahlen, von denen nur die letzteren nicht auf bestimmte Zahlwerthe zurückzuführen sind.

Die allgemeinen Naturbegriffe.

Wahrnehmung ist Bewusstwerden einer bestimmten Empfindung, d. h. eines bestimmten Zustandes unserer Organe. Bestimmt kann eine Empfindung nur sein im Gegensatz gegen andere; es müssen also Vorstellungen von anderen entgegengesetzten Empfindungen vorhanden sein; und da es nicht denkbar ist, dass ein einziges und untheilbares Wahrnehmen entgegengesetzte Qualitäten in sich vereinige, so muss es verschiedene Theile (Acte) des Wahrnehmens geben, welche, abgesehen von dem qualitativ bestimmten Inhalt, wie nach einem Verhältniss der Verschiedenheit in der Art des Wahrnehmens selbst verschieden sind. Dieses Verhältniss nennen wir Zeit. Von diesen verschiedenen Acten der Wahrnehmung nennen wir den von der Empfindung begleiteten, welchem wir die anderen entgegensetzen, die gegenwärtige Wahrnehmung, und die anderen die vergangenen. Werden sie nun alle in eine Reihe so geordnet, dass einer jeden alle vor ihr vergangenen vorausgehen, so erhalten wir eine ganz bestimmte Reihe mit bestimmter Richtung des Fortschreitens, deren Glieder alle, abgesehen von ihren qualitativen Unterschieden, verschieden sind nach jenem nothwendigen Verhältniss der Verschiedenheit im Wahrnehmen der Zeit.

Da dieses Verhältniss umfassen soll alle möglicherweise dagewesenen und kommen könnenden Fälle von Wahrnehmungen und ihren Uebergängen, so muss sein Begriff so bestimmt werden, dass es passe auf alle denkbaren Fälle.

Die Zeit ist:

1. ausgedehnt und theilbar in gleichartige Theile; ersteres insofern sie die ganze Reihe der Wahrnehmungen um-

fassen soll; jede einzelne ist in einem Theil der Zeit enthalten, und da hier an diesen Theilen überhaupt nur das Umfassen einer Wahrnehmung in Betracht kommt, nicht der qualitative Unterschied der letzteren, so sind sie als gleichartig zu setzen;

2. unbegrenzt ausgedehnt, weil die Zahl der zu umfassenden Wahrnehmungen keine nothwendige Grenze hat;
3. unbegrenzt theilbar, weil stetige Aenderungen der Wahrnehmungen denkbar sind, und jede der unendlich vielen Stufen der Aenderung in der Zeit enthalten sein musste. Jeder Zeittheil enthält daher noch differente kleinere Theile in sich; soll eine Zeitbestimmung in sich nicht mehr different, also ganz bestimmt sein (Zeitpunkt), so muss sie als nicht ausgedehnt gedacht werden; eine solche ist die Grenze zwischen den einzelnen Zeittheilen.
4. Die Richtung des Fortschreitens in der Zeit ist eine bestimmte und nur eine, daher auch durch die eine Bestimmung, um wie viel Zeit etwas früher oder später sei als ein anderes bekanntes, der Zeitpunkt vollständig bestimmt ist.

Wird die Zeit als Grösse betrachtet, so ist sie zu denken als wachsend von 0 bis $+\infty$ durch alle positiven ganzen und gebrochenen Zahlen; da aber jeder Zeitpunkt vom Anfangspunkte der Zeit als unendlich entfernt gedacht werden muss, so sind Zeitbestimmungen in bestimmten Zahlen nur möglich durch Angabe der positiven oder negativen Differenz der zu suchenden Zeit von einer als bekannt vorausgesetzten, dann ist die Zeit als wachsend zu denken stetig von $-\infty$ bis $+\infty$. Der Grösse nach gegeben durch eine Bestimmungsgleichung, d. h. abhängig von einer Variablen, oder von der ersten Dimension, wenn wir eine durch n Bestimmungen zu gebende Ausdehnungsgrösse als eine der $n$ten Dimension bezeichnen.

Als gleich werden Zeittheile zu setzen sein, in welchen dieselben Aenderungen unter gleichen Umständen vor sich gehen.

Die Wahrnehmungen sind ferner gesetzt als unabhängig von unserer Selbstthätigkeit entstanden, müssen also gesetzt werden als verursacht durch ein Anderes, uns Aeusseres, welches wir, insofern es bloss da ist, Materie nennen, insofern es auf uns wirkt, d. h. Grund von Veränderungen ist, Kraft.

Das Aeussere, insofern es bloss Materie ist, ist daher ohne qualitativen Unterschied, also auch ohne qualitative Aenderung, ewig dasselbe; der Quantität nach betrachtet, Masse. Da es aber doch verschieden auf uns wirken soll, müssen verschiedene Theile der Materie verschiedene Kräfte haben. Die Kräfte an sich können, da sie qualitative Unterschiede haben, der Zeit nach veränderlich gedacht werden, als Grund ihrer Veränderung muss wieder eine andere Kraft gedacht werden, und so muss immer weiter zurückgegangen werden, bis man auf der Zeit nach constante Kräfte bestimmter Theile der Materie kommt (chemische Elemente).

Das Aeussere, der Grund unserer Empfindungen, ist also zu setzen als zusammengesetzt aus Materien mit verschiedenen Kräften, es kann also nicht als ein eines und untheilbares Sein gesetzt werden. Es soll also Verschiedenes gleichzeitig sein; deshalb muss im Gleichzeitigsein noch ein Verhältniss vorkommen, nach welchem Objecte, abgesehen von ihrer qualitativen Verschiedenheit, verschieden sein können, weil ein einziges untheilbares Sein nicht mit verschiedenen Qualitäten begabt sein kann; dieses Verhältniss ist der Raum, in welchem die verschiedenen Objecte geordnet zu denken sind. Die Glieder dieser Ordnung sind, da ihr wesentliches Merkmal die Gleichzeitigkeit ist, nicht in bestimmter Richtung fortschreitend, daher braucht die Fortschreitung nicht wie bei der Zeit eine einfache zu sein, sondern ist möglicherweise mehrfach.

Der Raum ist wie die Zeit zu setzen als ausgedehnt und theilbar in gleichartige Theile, und zwar als ∞ ausgedehnt und ∞ theilbar, weil weder die Zahl noch die Theilbarkeit der möglicherweise in ihm enthaltenen Gegenstände a priori begrenzt ist. Jeder noch ausgedehnte Raumtheil enthält daher noch andere differente in sich, eine Raumbestimmung ohne Ausdehnung heisst Punkt. Weil der Punkt keinen reellen Gegenstand enthalten kann, daher auch nicht aus Materie darstellbar ist, hat man ihn für eine nicht reelle Grösse erklären wollen, er ist aber nicht weniger reell als der Raum überhaupt, der auch kein wirkliches Ding ist.

Da die Richtung des Fortschreitens im Raum keine bestimmte ist, so ist ein Punkt durch die Angabe, wie viel Raum zwischen ihm und einem anderen sei, noch nicht gegeben, sondern es sind mehr Bestimmungen nöthig, d. h. nach obiger Erklärung des Begriffs Dimension: der Raum ist eine stetig bis ∞ wachsende Grösse von mehreren Dimensionen, wir wollen annehmen von n, d. h. jeder Punkt sei durch n Bestimmungsstücke zu geben. Existiren wieder Bedingungen zwischen diesen Bestimmungsstücken, so dass für gewisse Werthe mehrerer von ihnen nur gewisse der anderen möglich sind, so können einzelne Punkte auch durch weniger Bestimmungen gegeben sein, und umgekehrt könnten aus mehreren Bestimmungen identisch die anderen folgen, so dass der Punkt nur scheinbar durch n Bestimmungen gegeben wäre. Wird daher allgemein gesagt: ein Punkt ist durch n Bestimmungsgleichungen gegeben, so sind die etwaigen Gleichungen zwischen bestimmten Werthen der Variablen selbst mitzurechnen, und die Gleichungen fortzulassen, welche identisch aus den anderen herfliessen. Wie bei der Zeit kann die Messung des Raumes nicht angefangen werden von einem Anfangspunkte desselben, weil es einen solchen nicht giebt, sondern muss von bestimmten, als bekannt vorausgesetzten Punkten ausgehen.

Theile des Raumes, welche Raumgrössen genannt werden mögen, sofern sie noch wieder theilbar, d. h. keine Punkte sind, haben entweder ebenso viel Dimensionen oder weniger. Ein in einer Raumgrösse $a$ter Dimension liegender Punkt soll durch a Bestimmungen gegeben sein, im Raume ist er es erst durch n, also müssen aus den Eigenschaften der gegebenen Raumgrösse noch $n - a$ Bestimmungen herfliessen, d. h. eine Raumgrösse $a$ter Dimension ist durch $n - a$ Bestimmungsgleichungen gegeben. Die erster Dimension heisse Linie, die zweiter Fläche.

Soll eine Raumgrösse $a$ter Dimension nicht in der ganzen Ausdehnung genommen werden, wie sie durch ihre $n - a$ Bestimmungsgleichungen gegeben ist, sondern nur bis zu gewissen Punkten, soll also für jeden Werth von $n - 1$ Coordinaten die $n$te nicht über oder unter einen gewissen Werth gehen, was durch eine Gleichung gegeben ist, so werden jene Punkte, deren Inbegriff die Grenze genannt wird, bestimmt durch $n - a + 1$ Gleichungen, bilden also eine Raumgrösse von $a - 1$ Dimensionen.

Wir haben nun zunächst zu fragen, wie es möglich ist, einen Punkt gegen einen anderen zu bestimmen; die einzige durch zwei Punkte zu begrenzende Raumgrösse ist aber die Linie; es müsste also die Länge einer bestimmten Art von Linie angegeben werden. Die Länge der möglich ziehbaren Linien hat kein Maximum, denn sie können durch ∞ weit entfernte Punkte hindurchgehen, und kann nicht 0 werden, muss folglich ein positives Minimum haben. Die Länge der einen oder mehreren kürzesten Linien zwischen zwei Punkten oder Raumgrössen nennen wir Entfernung.

Ist der Punkt p_1 von p_n um a, von p_m um b entfernt, so kann p_n von p_m nie weniger als $a - b$, nie mehr als $a + b$ entfernt sein (weil es sonst einen kürzeren Weg von p_1 nach p_m oder von p_n nach p_m gäbe, als ihre Entfernung).

So weit reichen die Bestimmungen des Raumes, insofern er alle möglicherweise vorhandenen materiellen Objecte umfassen soll, und zwar da ein endlich begrenzter Raum (eine endliche Raumgrösse $n$ter Dimension) als ein solcher zu setzen ist, der eine endliche Zahl endlicher Massen enthält, so können endliche Massen nur in Raumgrössen höchster Dimension enthalten sein, und heissen als solche materielle Körper; die sie enthaltenden Raumgrössen aber mathematische Körper. In materiellen Körpern können wieder Punkte, Linien etc. unterschieden werden, die dann materielle Punkte etc. genannt werden können.

Ferner muss der Begriff des Raumes auch noch so bestimmt werden, dass er alle möglichen Aenderungen der Materie umfassen könne, die hier offenbar nur so weit in Betracht kommen, als sie Aenderungen der Raumverhältnisse, d. i. Bewegungen sind.

1. Wird ein materieller Körper bewegt, so ist er fortdauernd in einem Theil des Raumes vorhanden; dabei ist es denkbar, dass alle einzelnen Theile des Körpers ihre Lage zu einander unverändert beibehalten (fester Körper); dann werden auch die einzelnen Punkte, Linien etc. jedes neuen ihn enthaltenden mathematischen Körpers sich zu einander ganz so verhalten wie die des ersten, und insofern kann gesagt werden, der mathematische Körper selbst, seine Punkte, Linien etc. bewegen sich mit der Materie. In diesem Sinne sind unter einem festen System von Punkten solche bewegliche Punkte zu verstehen, die bei ihrer Bewegung stets ihre gegenseitigen Bestimmungen unverändert erhalten; Raumgrössen wären demnach als stetige feste Systeme zu betrachten.

Congruent sind feste Systeme, wenn das eine so in das andere bewegt werden kann, dass jeder Punkt des einen mit einem des anderen zusammenfällt. Paare von gleich entfernten Punkten sind congruent.

2. Bewegung soll der Materie zukommen, abgesehen von all ihren besonderen Kräften; dann ist aber das einzige übrig-

bleibende Merkmal eines bestimmten Theils der Materie der besondere Raum, in dem sie enthalten ist; da ihr in der Bewegung aber auch dies Kennzeichen genommen wird, so kann ihre Identität nur dann noch ausgesagt werden, wenn wir den Uebergang aus dem einen Raume in den anderen anschauen, d. h. Bewegung muss stetig sein dem Raume nach.

Wird daher eine Raumgrösse $a$ter Dimension bewegt gedacht, so erhalte ich für jede der stetig in einander übergehenden Lagen $n - a$ Gleichungen mit stetig in einander übergehenden Werthen der $n - a$ zu suchenden Coordinaten für gleiche Werthe der a anzunehmenden; von jenen stetig sich ändernden könnte ich noch für die eine einen beliebigen Werth wählen, und erhielte dann unmittelbar die zugehörigen Werthe der anderen; der Weg einer Raumgrösse $a$ter Dimension ist daher im Allgemeinen eine Raumgrösse $(a + 1)$ter.

Die Werthe der zu suchenden Unbekannten brauchten sich nicht nothwendig zu ändern, wenn nämlich jeder Punkt der bewegten Grösse nur immer wieder in Punkte übergeht, die schon vorher darin lagen; solche Bewegung nennen wir Verschiebung; jene erste aber Seitenbewegung.

Linie also = Weg des Punktes,
Fläche = Weg der Linie.

3. Da Raumbestimmung überhaupt nicht in Beziehung auf den absoluten Raum möglich ist, so kann auch Aenderung derselben, d. h. Bewegung, nur in Bezug auf bestimmte Punkte oder Systeme stattfinden, und es kann ein Punkt in Bezug auf verschiedene solche zugleich in Ruhe und in Bewegung sein. Ruhe und Bewegung sind also nicht an sich verschiedene Zustände der Materie, sondern nur relativ.

Da nun die Materie gesetzt wurde als verharrend in ihrem Zustande, so lange keine Kräfte auf sie einwirken, so muss auch gesetzt werden ihre Ruhe und ihre Bewegung als eine bleibende, bis sie durch Bewegungskräfte geändert wird. Es sind daher zu suchen die Bestimmungen einer

Bewegung, welche vollständig abzuleiten ist aus dem sich immer gleichbleibenden Zustande der Bewegung selbst, in welchem sich der bewegte Körper befindet, die ich stabile Bewegung nennen will.

Der Begriff der Richtung ist offenbar die Bestimmung einer Bewegung, durch welche die Punkte festgesetzt werden, nach denen sich die Bewegung hin erstreckt, wenn die Bewegung ungestört vor sich geht; sie wird daher bei der stabilen Bewegung als eine stets gleichbleibende zu bezeichnen sein.

Eine Bewegung ist aber vollständig bestimmt, wenn die Punkte bestimmt sind, in welchen sich zu jeder gegebenen Zeit die Punkte des bewegten Körpers befinden; betrachte ich nur die Bewegung eines einzigen Punktes, so ist dessen Lage zu bestimmen, wenn 1. die Bahn selbst bekannt ist, und 2. wie viel er davon in jedem Zeittheil zurücklegt, d. h. wenn bekannt ist das Verhältniss zwischen dem zurückgelegten Raum zu der dazu gebrauchten Zeit. Ist es constant, so kann ich zu seiner Bestimmung einen beliebig grossen Raum nehmen, $c = \frac{s}{t}$, daher $s = ct$. Ist es veränderlich, so muss ich einen unendlich kleinen Raum nehmen, in dessen Ausdehnung das Verhältniss als gleichbleibend zu betrachten ist, d. h. den Differentialquotienten $\frac{\delta s}{\delta t}$ oder $\delta_t s$.

Da bei der stabilen Bewegung alle Bestimmungen dieselben bleiben sollen, muss c constant sein.

Was nun die Form der Bahn betrifft, so ist zunächst klar, dass sie stets gleich bleiben muss, d. h., dass jedes Stück derselben jedem gleich langen anderen congruent sein muss. Ferner soll nach unserer obigen Forderung dieselbe vollständig abzuleiten sein aus dem Zustande der Bewegung, in dem der Körper sich befindet, den wir uns als den Grund des Weitergehens zu denken haben. Dieser ist wirksam nur in Richtung der Bahn, kann aber offenbar in

Seitenrichtungen durchaus keine Verschiedenheiten bewirken; es dürfen deshalb keine Verschiedenheiten in dem Verhalten des Weges nach Seitenrichtungen vorhanden sein, d. h. da durch Seitenbewegung einer Linie eine Fläche entsteht, und in dieser ein Punkt durch Bestimmung gegen zwei der Linie vollständig zu geben ist und in allen stetig in einander übergehenden Seitenrichtungen ebenso bestimmte Punkte möglich sind, so müssen gegen alle Punkte, die durch eine solche Bestimmung gegeben sind, sich alle Punkte der Linie gleich verhalten, d. h. also: durch Bestimmungen von n Punkten einer geraden Linie aus ist kein ausserhalb gelegener Punkt vollständig zu bestimmen, sondern $n - 2$ Bestimmungen geben immer nur wieder dieselben Punkte, welche die beiden anderen schon allein geben, oder wenn ein Punkt ausserhalb einer solchen Linie gegen zwei Punkte derselben bestimmt ist, ist er es gegen alle. Daher denn auch, wenn zwei Punkte einer solchen Linie gegen äussere Coordinaten-Punkte bestimmt sind, es auch alle anderen sind, d. h. eine solche Linie ist durch zwei Punkte vollständig gegeben; wir nennen sie gerade.

Aus dieser Definition folgt sogleich, dass zwischen zwei Punkten nur eine gerade Linie möglich ist, dass gleich lange gerade Linien congruent sind, daher die gerade Linie unmittelbar durch Auftragen eines ihrer als Maasseinheit angenommenen Theile gemessen werden kann, und auch zur Bestimmung der Lage eines Punktes gegen einen anderen zu benutzen ist. Die Länge der geraden Linie zwischen zwei Punkten wollen wir den geraden Abstand derselben nennen.

Gerade Raumgrössen $a$ter Dimension sind solche, in denen durch je a beliebige Punkte eine gerade Raumgrösse $(a - 1)$ter Dimension zu legen ist, die ganz in der ersteren liegt. (Ebene, oder gerade Fläche, ist eine solche, deren jede zwei Punkte durch gerade Linien verbunden werden können, welche ganz in derselben liegen.)

Winkel ist das Lagenverhältniss zweier gerader Linien zu einander, die durch Linien zu begrenzende Raumgrösse muss eine Fläche, und zwar eine bestimmte sein, daher der Winkel gemessen wird durch das Stück einer Ebene, welches zwischen diesen Schenkeln liegt; als gleich sind congruente Winkel zu setzen . . ."

Am 21. April 1868 schreibt Helmholtz an Schering in Göttingen:

„Indem ich Ihnen meinen Dank für die Uebersendung der beiden kleinen, Riemann betreffenden Aufsätze ausspreche, erlaube ich mir eine Frage. In Ihrer Notiz über sein Leben finde ich die Angabe, dass er eine Habilitationsvorlesung gehalten habe über die Hypothesen der Geometrie. Ich habe selbst in den letzten zwei Jahren im Zusammenhange mit meinen Untersuchungen über physiologische Optik mich mit dem gleichen Gegenstande beschäftigt, aber die Arbeit noch nicht abgeschlossen und veröffentlicht, weil ich immer noch hoffte, einzelne Punkte verallgemeinern zu können. Ich kann namentlich noch nicht Alles für drei Dimensionen gleich allgemein machen, wie ich es für zwei kann. Nun erkenne ich aus den wenigen Andeutungen, die Sie über das Resultat der Arbeit geben, dass Riemann zu genau denselben Resultaten gekommen ist wie ich. Mein Ausgangspunkt ist die Frage: Wie muss eine Grösse von mehreren Dimensionen beschaffen sein, wenn in ihr feste Körper (i. e. Körper von unveränderten relativen Abmessungen) sich überall sollen continuirlich, monodrom und so frei bewegen können, wie die Körper im wirklichen Raume sich bewegen. Antwort, ausgedrückt in der Weise unserer analytischen Geometrie: „Es seien x, y, z, t die rechtwinkeligen Coordinaten eines Raumes von vier Dimensionen, so muss sein für jeden Punkt unseres Raumes von drei Dimensionen $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = R^2$, wo R eine unbestimmt bleibende Constante, die im Euclidischen Raume unendlich ist." — Ich möchte Sie bitten, mich wissen zu lassen, ob Riemann's

Aufsatz schon gedruckt ist, oder ob Aussicht ist, dass er bald gedruckt werden könne, was mir höchst wünschenswerth erscheint; eventualiter ob Riemann von demselben Ausgangspunkte ausgegangen ist, dann würde nämlich meine Arbeit unnütz, und ich möchte dann nicht mehr so viel Zeit und Kopfschmerzen daran verwenden, als sie mich schon gekostet haben.“

Als ihm Schering darauf mitgetheilt hatte, dass „das wesentlichste Moment in Riemann's Untersuchung der Satz bildet, dass die von Gauss als Krümmungsmaass definirte Grösse eine Differentialinvariante für homogene Differentialausdrücke zweiten Grades erster Ordnung mit zwei Variabeln bedeutet“, antwortet ihm Helmholtz bereits am 18. Mai:

„Dank für das Exemplar von Riemann's Habilitationsschrift ... Beiliegend sende ich Ihnen eine kurze Darstellung desjenigen, was in meinen Arbeiten über denselben Gegenstand von Riemann's Arbeit nicht gedeckt wird, mit der Bitte, es der Königl. Gesellschaft zum Abdruck in den Göttinger Anzeigen (Sitzungsberichten) zu überreichen. Ich glaube, dass eine vollständige Ausarbeitung des Ganzen im Zusammenhange wohl wünschenswerth sein wird, und ich möchte sie dann am liebsten in den Abhandlungen Ihrer Gesellschaft, wo Riemann's steht, gedruckt sehen. Ich erlaube mir deshalb die Frage, ob Abhandlungen correspondirender Mitglieder der Gesellschaft, was ich bin, aufgenommen werden, und wann etwa wieder der Druck eines neuen Bandes beginnen würde ... Verzeihen Sie um Riemann's willen, wenn ich Ihnen mit diesen Dingen Mühe mache.“

Schon wenige Tage darauf hielt er am 22. Mai in Heidelberg den oben erwähnten Vortrag, den er noch am 30. April 1869 durch einen Zusatz ergänzte, während die Arbeit selbst in den Nachrichten der Göttinger Gesellschaft am 3. Juni 1868 erschien.

Die physiologisch-optischen Untersuchungen hatten

Helmholtz zur Ueberzeugung geführt, dass, so wie beim Acte des Sehens gleichzeitig zwei verschiedene Empfindungen unverschmolzen zum Bewusstsein kommen, und daher ihre Verschmelzung zu dem einfachen Anschauungsbilde der körperlichen Welt durch einen Act des Bewusstseins auf Grund der Erfahrung geschieht, es überhaupt unmöglich ist, den Theil unserer Anschauungen, welcher der unmittelbaren Empfindung angehört, von demjenigen zu trennen, der erst durch Erfahrung gewonnen ist. Nur die Beziehungen des Raumes und der Zeit, also auch der Zahl sind nach ihm der inneren und äusseren Welt gemeinsam, in diesen allein also kann eine volle Uebereinstimmung der Vorstellungen mit den abgebildeten Dingen erstrebt werden. So trat naturgemäss die Frage an ihn heran, wodurch wird diese Uebereinstimmung der Raum- und Zeitvorstellungen mit den abgebildeten Dingen erreicht, was ist in diesen Vorstellungen a priorisch, was Ausfluss der Erfahrung, und welches ist der Ursprung der allgemeinen Raumanschauung überhaupt? Er ist weit davon entfernt, wie er das schon in seiner physiologischen Optik ausführt, Widerspruch zu erheben gegen die Kant'sche Auffassung des Raumes als transcendentaler Form der Anschauung. Aber er hatte auf dem Gebiete der Sinneswahrnehmungen sich klar gemacht, dass es z. B. in der Organisation unseres Auges liegt, alles, was wir sehen, nur als eine räumliche Vertheilung von Farben zu sehen, ohne dass durch diese Gesichtswahrnehmung selbst irgend welche räumliche oder zeitliche Aufeinanderfolge der Farben bedingt wird, — und da lag für ihn die Frage nahe, ob denn die transcendentale Form der Raumanschauung nothwendig die Annahme nach sich zieht, dass nach oder neben bestimmten Raumwahrnehmungen auch eine andere bestimmte eintreten müsse, oder ob darin die Annahme gewisser Axiome eingeschlossen ist.

Es war zunächst sein Bestreben, die Begriffsentwickelungen in der Geometrie von den Ergebnissen der Erfahrung, welche scheinbar als Denknothwendigkeiten auftreten, zu sondern, während er erst in seiner zehn Jahre später gehaltenen Rede über die Thatsachen der Wahrnehmungen die Resultate seiner Forschungen zum Aufbau eines einheitlichen philosophischen Systems, welches wesentlich von dem Kantschen abwich, zusammenfasste. War die Abweichung von Kant auch schon theilweise früher in seiner physiologischen Optik hervorgetreten, so vollzog sie sich doch erst entschieden in den Arbeiten vom Jahre 1868 über die Axiome der Geometrie. In einem 20 Jahre später abgegebenen Gutachten über ein Werk, welches damals allgemeineres Interesse erregte, führt er aus:

„Die Kantianer strictester Observanz betonen vor Allem die Punkte, wo Kant meines Erachtens unter der unvollkommenen Entwickelung der Specialwissenschaften seiner Zeit gelitten und sich in Irrthümer verwickelt hat. Der Kernpunkt dieser Irrthümer sind die Axiome der Geometrie, die er für a priori gegebene Formen der Anschauung ansieht, die aber in der That Sätze sind, die durch Beobachtung geprüft und, wenn sie unrichtig wären, eventuell auch widerlegt werden könnten. Dies letztere habe ich zu erweisen gesucht. Damit fällt aber überhaupt die Möglichkeit fort, metaphysische Grundlagen der Naturwissenschaft geben zu können, an die Kant in der That glaubte. Nun ist es in seinen hinterlassenen Papieren für meinen Standpunkt sehr interessant, zu sehen, wie diese Angelegenheit den alternden Mann in seinem Innern beunruhigt hat, wie er sie hin- und hergewälzt, dafür immer wieder und wieder neue Formulirungen gesucht und keine gefunden hat, die ihn befriedigten. Dabei tauchen im Einzelnen immer noch sehr überraschende Einsichten auf, wie man sie bei einem Manne seiner geistigen Grösse erwarten darf, z. B. über die Natur der Wärme. ... Meines Erachtens kann man, was Kant Grosses geleistet hat, nur halten, wenn man seinen Irrthum über die rein transcendentale Bedeutung der geometrischen und mechanischen Axiome fallen lässt. Damit fällt aber auch jede Möglichkeit, sein System zu einer Grundlage der Metaphysik zu machen, und dies scheint mir der innere Grund zu sein, weshalb sich unter seinen Anhängern alle, die metaphysische Neigungen und Hoffnungen haben, an diese bestrittenen Punkte anzuklammern suchen."

Dass sich Helmholtz mit diesen Problemen schon während der Ausarbeitung seiner physiologischen Optik beschäftigte, geht aus einigen an seinen damaligen mathematischen Collegen Hesse im Jahre 1865 gerichteten Briefen hervor, in denen er sich bezüglich der Eigenschaften der homogenen Functionen zweiten Grades mit beliebig vielen Variabeln Mittheilungen erbat. Aus einer noch früheren Zeit stammen einige kurze Aufzeichnungen, in denen er sich selbst erst in consequenter Durcharbeitung der in die Mathematik und Naturwissenschaften eintretenden Begriffe und Anschauungen die a priorischen Anschauungen des Raumes und der Zeit zu analysiren bestrebt ist. Abgesehen von Bruchstücken, welche ihrem Inhalte nach in die beiden oben genannten Arbeiten vom Jahre 1868 Aufnahme gefunden haben, die nachher besprochen werden sollen, findet sich unter anderem die als Disposition zu einer beabsichtigten Ausarbeitung zu betrachtende Notiz:

„Um den Sinn der Axiome klar zu machen, ist es nöthig, zu untersuchen, welche anderen Systeme der Raummessung logisch denkbar seien. Logisch denkbar in Bezug auf Grössenverhältnisse ist das algebraisch mögliche, da die Algebra nichts ist als die logische Entwickelung des Begriffes der Grösse und ihrer Gleichheit. — Punkt ein Ort im Raume, innerhalb dessen keine Verschiedenheit mehr zu finden ist. — Bei der Art unseres Wahrnehmungsvermögens muss ferner die Möglichkeit der Bewegung von jedem Punkte des Raumes in continuirlichem Uebergange zu jedem anderen vorausgesetzt werden, i. e. der Raum sei continuirlich zusammenhängend. Durch die Bewegung wird zugleich die Anordnungsweise der Raumpunkte neben einander gegeben, ohne dass noch Grössenmessung nöthig ist.

Eine netzförmige Anordnungsweise unterscheidet sich von einer ganz continuirlichen dadurch, dass eine begrenzte Anzahl einzelner discreter Punkte einen Theil vollständig abgrenzen kann. Linie ist eine Reihe von Punkten der Art, dass jeder Theil derselben durch eine endliche Anzahl von Punkten vollständig abgegrenzt werden kann. Eine geschlossene Linie ist eine solche, welche durch einen Punkt nicht in zwei Theile getheilt wird; eine ungeschlossene wird es. Eine zellenartige Anordnung des Raumes würde zulassen, dass ein Theil durch eine endliche Anzahl von Linien zu begrenzen wäre. Fläche ist ein Raumgebilde, welches durch eine endliche Anzahl von Linien vollständig abgegrenzt werden kann. Der wirkliche Raum ist dadurch charakterisirt, dass er nur durch Flächen abgegrenzt oder getheilt werden kann; ferner dadurch, dass er durch jede unbegrenzte Fläche (geschlossene einbegriffen) vollständig getheilt wird. Er ist also einfach zusammenhängend."

Alle weiteren Aufzeichnungen, zu denen noch eine grosse Anzahl einzelner mathematischer Ausführungen von dem höchsten Interesse gehört, die uns Helmholtz auch als einen ausgezeichneten Algebraiker bewundern lassen, zeigen uns deutlich die Richtung, in welcher sich seine Untersuchungen über die Axiome der Geometrie, ohne Kenntniss der Forschungen Anderer über diesen Gegenstand, bewegten. Er beabsichtigte auch seine Resultate in Form einer zusammenhängenden Theorie eines Raumes von zwei, drei und mehr Dimensionen zu entwickeln, bis er durch die oben erwähnte Mittheilung von Schering bezüglich der Riemannschen Habilitationsschrift veranlasst wurde, in seinen beiden Veröffentlichungen in Heidelberg und Göttingen nur das, was in seinen Untersuchungen zu den von Riemann gewonnenen Resultaten neu hinzukam, eingehend zu behandeln.

Bei seinen Untersuchungen über die Sinneswahrnehmungen hatte sich Helmholtz die Frage aufgedrängt, was in den einfachsten Formen unserer Raumanschauung aus der Erfahrung entnommen sei, was nicht aus einer solchen herrühren könne, und wie viel nothwendig aus der Erfahrung entnommen werden müsse, um das Andere darauf zu stützen. Es waren bereits früher Gründe und Gegengründe dafür vorgebracht worden, dass entweder die geometrischen Axiome ursprünglich gegebene Formen unseres Anschauungsvermögens seien, welche aller Erfahrung vorausgingen und in der Organisation unseres Geistes begründet seien, oder im Gegentheil für Erfahrungssätze allgemeinster Art zu gelten haben. Um diese Untersuchung aus dem philosophisch-physiologischen Gebiete in das mathematische zu übertragen, suchte sich Helmholtz zum Zwecke einer präciseren Fragestellung klar zu machen, welche andere Beschaffenheiten des Raumes, als einer Grösse von mehreren Dimensionen, überhaupt logisch denkbar oder, da es sich hier um Grössenverhältnisse handelt, algebraisch möglich wären, wenn man von den bisher angenommenen Axiomen unserer Geometrie absehen wollte.

Wesentlich war es für die Untersuchungen Helmholtz's gewesen, dass er bei seinen physiologisch-optischen Arbeiten zwei anderen Fällen von Grössen mehrerer Variabeln begegnet war, in deren Abmessungssystem sich gewisse fundamentale Unterschiede gegen die Raummessungen zeigten. Während im Raume zwischen je zwei Punkten eine Grössenbeziehung besteht, die mit der zwischen zwei anderen verglichen werden kann — nämlich das Zahlenverhältniss der Entfernung $ab:bc$ der drei Punkte a, b, c — wird im Gebiete der Farben, wenn man die Unterschiede der Helligkeit mit hinzunimmt, die einfachste Maassbeziehung erst zwischen vier Farben a, b, c, d bestehen, wenn diese aus je zweien mischbar sind, also in der Farbentafel in gerader Linie liegen — nämlich das Verhältniss der beiden Verhältnisse, in denen a und c

gemischt werden müssen, um einerseits *b*, andererseits *d* zu geben. Er hatte ferner bei der Untersuchung der Bildung des Augenmaasses im zweidimensionalen Gesichtsfelde gefunden, dass die Messung sehr wahrscheinlich darauf beruht, dass durch die Bewegungen des Auges die Netzhaut wie ein fester Zirkel am Netzhautbilde entlang geführt wird, wobei aber ein Unterschied gegen die Messungen im äusseren Raume darin stattfindet, dass wir diesen Zirkel bei den Messungen so gut wie gar nicht zur Vergleichung verschieden gerichteter Linien gebrauchen können. Dadurch wurde Helmholtz auf den Einfluss aufmerksam, den das Messungsmittel auf das System der ganzen Messung und die Form ihrer Resultate ausübt, und diese Ueberlegungen führten ihn zu Untersuchungen, die sich nicht nur auf den Raum, sondern auch auf jedes andere Gebiet von mehreren Dimensionen beziehen, in welchem eine durch nur zwei Punkte gegebene Grösse (Entfernung) messend verglichen werden kann mit einer entsprechenden, die sich auf ein beliebig gelegenes anderes Punktepaar bezieht. Helmholtz zeigt, dass alles darauf ankomme, die speciellen Voraussetzungen zu formuliren, unter denen das Quadrat der Entfernung zweier unendlich naher Punkte die verallgemeinerte Form des Pythagoräischen Lehrsatzes annimmt, also durch eine homogene Function zweiten Grades von den Differentialien dreier beliebiger zur Abmessung der Lage der Punkte gebrauchten Grössen ist.

„Ich glaube, dass die von mir durchgeführte Betrachtung nicht ohne Wichtigkeit auch für die Frage von der Auffindung der geometrischen Grundsätze durch ihre ersten Entdecker ist. Denn wenn die Menschen nach einer mathematischen Formulirung suchten, der sie ihre mehr oder weniger genauen Beobachtungen und Messungen anpassen konnten, so konnten sie keine andere, die sich hätte consequent durchführen lassen, finden, als die im Pythagoräischen Lehrsatz ausgesprochene, weil es in der That keine andere gab. Und darin ist, glaube ich, auch die eigenthümliche Art von Ueberzeugung begründet, die wir von den sowohl theoretisch als praktisch unbeweisbaren Axiomen haben. Es bleibt uns nämlich keine Wahl, sie anzunehmen, wenn man nicht auf alle Möglichkeit der Raummessung verzichten will.“

Helmholtz sieht nun zunächst völlig ab von Kant's Lehre der a priori gegebenen Formen der Anschauung und der Axiome der Geometrie und legt sich die Frage nach den Thatsachen vor, welche der Geometrie zu Grunde liegen, oder die Frage, welche Sätze der Geometrie sprechen Wahrheiten von thatsächlicher Bedeutung aus, welche dagegen sind nur Definitionen oder Folgen von Definitionen und der besonderen gewählten Ausdrucksweise. Die Beantwortung dieser Frage bietet aber deshalb so grosse Schwierigkeiten, weil man es in der Geometrie stets mit idealen Gebilden zu thun hat, denen sich die körperlichen Gebilde der wirklichen Welt immer nur annähern; die Entscheidung darüber, ob z. B. die Flächen eines Körpers eben, seine Kanten gerade sind u. s. w., kann nur mit Hülfe der geometrischen Sätze getroffen werden, deren thatsächliche Richtigkeit erst erwiesen werden soll. Man sieht auch leicht, dass ausser den gewöhnlich für die Geometrie hingestellten Axiomen von Euclid noch eine Reihe von weiteren Thatsachen stillschweigend vorausgesetzt wird. Es ist wesentlich zu beachten, dass wir uns nur solche Raumverhältnisse anschaulich vorstellen können, welche im wirklichen Raume möglicher Weise darstellbar sind, und dass wir uns daher durch diese Anschaulichkeit nicht verleiten lassen dürfen, etwas als selbstverständlich vorauszusetzen, was in Wahrheit eine besondere und nicht selbstverständliche Eigenthümlichkeit der uns vorliegenden Aussenwelt ist.

Da aber die analytische Geometrie die Gebilde des Raumes nur als Grössen behandelt, welche durch andere

Grössen bestimmt werden, indem alle uns bekannten Raumverhältnisse messbar, also auf Bestimmung von Grössen, Linienlängen, Winkeln, Flächen u. s. w. zurückgeführt werden können, so wird dieselbe zu ihren Beweisen die Anschauung nicht brauchen, und Helmholtz wurde durch diese Ueberlegung naturgemäss zur Formulirung der Frage geführt, welche analytischen Eigenschaften des Raumes und der Raumgrössen müssen für die analytische Geometrie vorausgesetzt werden, um deren Sätze vollständig von Anfang her zu begründen. Er gewann damit den Vortheil, die Möglichkeit folgerichtiger Durchführung eines abweichenden Systemes von Axiomen vollständig überblicken zu können, da die in der analytischen Geometrie auszuführende Rechnung eine rein logische Operation ist, welche keine Beziehung zwischen den der Rechnung unterworfenen Grössen ergeben kann, die nicht schon in den Gleichungen, welche den Ansatz der Rechnung bilden, enthalten ist.

Durch die Untersuchungen von Gauss war gezeigt worden, dass, während sich das Quadrat der Länge eines Linienelementes in der Ebene durch die Summe der Quadrate der Incremente der beiden rechtwinkligen Coordinaten ausdrückt, sich das Quadrat eines Linienelementes auf einer beliebigen Fläche als homogene Function zweiten Grades der Incremente zweier allgemeiner Coordinaten darstellt, welche die Lage eines Punktes auf einer Fläche bestimmen. Wenn Figuren von endlicher Grösse nach allen Theilen einer solchen Fläche ohne Veränderung ihrer in der Fläche selbst zu machenden Abmessungen beweglich und um jeden beliebigen Punkt drehbar sein sollen, so muss ferner die Fläche in allen ihren Punkten ein constantes Krümmungsmaass haben, wobei das Krümmungmaass der Fläche in einem Punkte von Gauss definirt ist als das reciproke Verhältniss eines unendlich kleinen, diesen Punkt umschliessenden Flächenstückes zu demjenigen Flächentheil, welcher durch, zu den Normalen parallele, Kugelradien auf der Einheitskugel abgebildet wird. Aber selbst auf Flächen constanten Krümmungsmaasses, wo also die freie Beweglichkeit der Figuren möglich ist, würde die Geometrie eine völlig von der unserigen abweichende Gestalt gewinnen.

Helmholtz geht von der Annahme aus, dass es uns als Bewohnern eines Raumes von drei Dimensionen möglich ist, die verschiedenen Arten, in denen flächenhafte Wesen ihre Raumvorstellungen ausbilden, uns zur Anschauung zu bringen und deren sinnliche Eindrücke uns auszumalen; Räume von mehr als drei Dimensionen können wir jedoch nicht mehr anschauen, da alle unsere Mittel sinnlicher Wahrnehmung sich nur auf einen dreidimensionalen Raum erstrecken — und nun führt er die Geometrie näher aus, wie sie sich verstandbegabten Wesen von nur zwei Dimensionen darstellen würde.

Er wirft die Frage auf, was dann aus den Axiomen unserer Geometrie wird, dass es zwischen zwei Punkten nur eine kürzeste Linie, die gerade Linie, giebt, dass ferner durch drei nicht in gerader Linie liegende Punkte des Raumes eine Fläche, die Ebene, gelegt werden kann, in welche jede zwei ihrer Punkte verbindende gerade Linie ganz hineinfällt, und dass endlich durch einen ausserhalb einer geraden Linie liegenden Punkt zu dieser nur eine einzige sie niemals schneidende, parallele Gerade gelegt werden kann. Jene Flächenwesen würden freilich ebenfalls im Allgemeinen kürzeste Linien zwischen zwei Punkten ziehen können, die er geradeste Linien nennt, aber schon in dem einfachsten Falle der Kugel würden zwischen je zwei Polen sich unendlich viele geradeste Linien ziehen lassen; parallele, sich nicht schneidende geradeste Linien würde man gar nicht ziehen können, und die Summe der Winkel im Dreieck würde immer grösser sein als zwei Rechte und um so grösser, je grösser die Fläche des Dreiecks. Der Raum jener Wesen würde allerdings unbegrenzt, aber endlich ausgedehnt gefunden oder mindestens vorgestellt werden müssen. Nur wenn das constante Krümmungsmaass den Werth Null hat, also die Fläche nach Gauss auf einer Ebene durch Biegung ohne Dehnung und Zerreissung abwickelbar ist, würde unsere Geometrie Geltung behalten.

Aber zunächst handelte es sich weder für Riemann noch für Helmholtz darum, unter welchen Bedingungen unsere geometrischen Axiome erhalten bleiben, sondern um die Frage, unter welchen, bisher nicht klar erkannten Voraussetzungen wir überhaupt zur Kenntniss unserer Axiome gelangt sind. Riemann legte dar, wie bei einer Verallgemeinerung des dreidimensionalen Raumes die allgemeinen Eigenthümlichkeiten des Raumes, seine Continuität und die Vielfältigkeit seiner Dimensionen dadurch ausgedrückt werden können, dass jedes besondere Einzelne in der Mannigfaltigkeit, die es darbietet, also jeder Punkt bestimmt sei durch Abmessung von n continuirlich und unabhängig von einander veränderlichen Grössen, seinen Coordinaten, so dass der Raum eine n-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit wird, und wir ihm n Dimensionen zuschreiben. Riemann fügt als weitere Forderung hinzu, dass die Länge einer Linie unabhängig sei von Ort und Richtung, dass also jede Linie durch jede andere messbar sei, und da in unserem wirklichen Raume das Maass eines jeden Linienelementes die Quadratwurzel aus einer homogenen Function zweiten Grades der Incremente von drei Abmessungen irgend welcher Art ist, so geht er bei seiner allgemeinen Untersuchung von dieser Form des Linienelementes als von einer hypothetischen aus. Er verallgemeinert endlich die Definition des Krümmungsmaasses auf den Raum von n Dimensionen und zeigt, dass, wenn er schliesslich noch die Forderung hinzufügt, dass endliche Raumgebilde ohne Formveränderung überall hin beweglich und in jeder Richtung drehbar sein sollen, das Krümmungsmaass constant sein muss. Es zeigt sich dabei, dass durch die zu Grunde gelegten Voraussetzungen die Unendlichkeit der Ausdehnungen des dreidimensionalen Raumes nicht gefordert wird; der Raum könnte auch in Bezug auf eine vierfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit das sein, was für eine dreifache Mannigfaltigkeit eine Fläche mit constantem Krümmungsmaass ist.

Die Untersuchung von Helmholtz war grösstentheils implicite schon in der von Riemann enthalten, lieferte jedoch in einer Beziehung wesentlich Neues und wurde gerade dadurch für alle weiteren Folgerungen und für die Frage nach den Axiomen der Geometrie von grosser Bedeutung. Er suchte nämlich die Bedingungen aufzustellen, unter denen der von Riemann hypothetisch angenommene, verallgemeinerte Pythagoräische Satz gültig war, und machte die von diesem erst zum Schluss seiner Untersuchung eingeführte Forderung, dass Raumgebilde ohne Formveränderung denjenigen Grad von Beweglichkeit haben sollen, den die Geometrie voraussetzt, von Anfang an zur Grundlage seiner Betrachtungen.

„Uebrigens muss ich bekennen, dass, wenn auch durch die Veröffentlichung von Riemann's Untersuchungen die Priorität in Bezug auf eine Reihe meiner eigenen Arbeitsresultate vorweg genommen ist, es für mich bei einem so ungewöhnlichen und durch frühere Versuche eher discreditirten Gegenstande von nicht geringem Gewicht war, zu sehen, dass ein so ausgezeichneter Mathematiker dieselben Fragen seines Interesses gewürdigt hatte, und dass es mir eine gewichtige Bürgschaft für die Richtigkeit des eingeschlagenen Weges war, ihn als Gefährten darauf anzutreffen.“

Dass alle ursprüngliche Raummessung auf Beobachtung der Congruenz beruht, bildete für Helmholtz den Ausgangspunkt der Untersuchung. Da aber von Constatirung der Congruenz nicht die Rede sein kann, wenn nicht feste Körper oder Punktsysteme in unveränderlicher Form zu einander bewegt werden können, und wenn nicht Congruenz zweier Raumgrössen ein unabhängig von allen Bewegungen bestehendes Factum ist, so stellte er sich die Aufgabe, die allgemeinste analytische Form einer mehrfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit zu suchen, in der die verlangte Art der Bewegungen möglich ist. Er prüft zunächst, in wie weit die von ihm aufgestellten Voraussetzungen seiner Untersuchung, welche 1. die Continuität und Dimensionen, 2. die Existenz beweglicher und in sich fester Körper, 3. die freie Beweglichkeit, 4. die Unabhängigkeit der Form fester Körper von der Drehung betreffen, die Möglichkeit verschiedener Systeme der Geometrie einschränken. Die gemachten Annahmen führen ihn zu einem von der Richtung unabhängigen Maass des Linienelementes in der Form, wie es Riemann verlangt, und er fasst die von ihm aufgestellten Bedingungen hierfür kurz dahin zusammen, dass ein Punkt einer n-fachen Mannigfaltigkeit durch n Coordinaten bestimmt ist, dass ferner zwischen den $2n$ Coordinaten eines unendlich benachbarten Punktepaares eine von der Bewegung des letzteren unabhängige Gleichung besteht, welche für alle congruenten Punktepaare dieselbe ist, und dass endlich bei sonst vollkommen freier Beweglichkeit des festen Körpers die Eigenschaft der Monodromie des Raumes erfüllt sein soll, wonach, wenn ein fester Körper von n Dimensionen sich um $n - 1$ feste Punkte dreht, die Drehung ohne Umkehr in die Anfangslage zurückführt. Indem er nun diese Bedingungen auf den Fall von drei unabhängigen Variabeln anwendet, kann er auf rein analytischem Wege zeigen, dass eine homogene Function zweiten Grades der Incremente derselben existirt, welche bei der Drehung unverändert bleibt, und dass es somit ein von der Richtung unabhängiges Maass des Linienelementes giebt.

Bei der Fortführung seiner Betrachtungen schlich sich ein Versehen durch die Behauptung ein, dass, wenn noch die unendliche Ausdehnung des Raumes gefordert wird, keine andere Geometrie möglich ist als die von Euclid gelehrte, während, wie Beltrami nachgewiesen hat, noch die Geometrie von Lobatschewsky existiren kann, nach welcher in dem nach allen Richtungen unendlich ausgedehnten Raume noch Figuren, die einer gegebenen congruent sind, in allen Theilen desselben construirt werden können, ferner zwischen je zwei Punkten nur eine kürzeste Linie möglich ist, aber der Satz von den Parallellinien nicht mehr zutrifft. Nur wenn das Krümmungsmaass des Raumes überall den Werth Null hat, entspricht ein solcher Raum den Axiomen des Euclid, und diesen Raum nennt Helmholtz dann einen ebenen Raum. Ist das Krümmungsmaass constant und positiv, so erhalten wir den sphärischen Raum, in welchem die geradesten Linien in sich zurücklaufen, und es keine Parallelen giebt; ein solcher Raum ist, wie die Oberfläche einer Kugel, unbegrenzt, aber nicht unendlich gross. Ist endlich das Krümmungsmaass constant und negativ, so laufen in solchen pseudosphärischen Flächen die geradesten Linien in das Unendliche aus, und in jeder ebensten Fläche lässt sich durch jeden Punkt ein Bündel von geradesten Linien legen, welche eine gegebene andere geradeste Linie jener Fläche nicht schneiden. In einem Raume, dessen Krümmungsmaass von Null verschieden ist, werden Dreiecke von grossem Flächeninhalt eine andere Winkelsumme haben als kleine; jedoch berechtigt uns das Resultat der geometrischen und astronomischen Messungen, welche die Winkelsumme eines Dreieckes nur nahezu und nie streng gleich zwei rechten Winkeln ergeben können, offenbar nur, zu schliessen, dass das Krümmungsmaass unseres Raumes sehr klein ist; dass es in Wirklichkeit verschwindet, lässt sich nicht beweisen, es ist ein Axiom.

Sehr interessant ist die in seinem Vortrage gegebene Ausführung, in welcher Helmholtz zeigt, dass wir uns den Anblick einer pseudosphärischen Welt nach allen Richtungen hin ausmalen können, und dass somit die Axiome unserer Geometrie durchaus nicht in der gegebenen Form unseres Anschauungsvermögens begründet sein können. Beltrami hatte einen pseudosphärischen Raum im Innern einer Kugel des Euclid'schen Raumes so abgebildet, dass jede geradeste Linie und jede ebenste Fläche des ersteren durch eine gerade Linie und eine Ebene in der letzteren vertreten wird; Helmholtz macht es durch ähnliche Abbildungsbetrachtungen plausibel, dass, wenn unsere Augen mit passenden Convexgläsern bewaffnet wären, uns der pseudosphärische Raum verhältnissmässig gar nicht sehr fremdartig erschiene, und dass wir nur in der ersten Zeit bei der Abmessung der Grösse und Distanz fernerer Gegenstände Täuschungen unterworfen sein würden.

Die Behauptung von Helmholtz, dass, wenn zu den von ihm aufgestellten Bedingungen noch die Forderung hinzukäme, dass der Raum unendlich ausgedehnt sei, die Euclid'sche Geometrie eindeutig bestimmt werde, widerlegt zuerst Beltrami in einem sehr interessanten, am 24. April 1869 von Bologna aus an Helmholtz gerichteten Briefe:

„C'est après beaucoup d'hésitations que je me suis décidé à prendre la plume pour vous adresser ces lignes, car il m'a toujours semblé que si l'on craint beaucoup, en général, d'importuner les grands de ce monde pour des choses de peu d'importance, à plus forte raison on devrait se garder d'occuper même une faible portion du temps dont les princes de l'esprit se servent si généreusement pour les progrès de l'humanité. Cependant, ayant beaucoup plus d'exemples de la bienveillance de ces derniers que de la condescendance de ceux-là, j'ai fini par céder à mon vif désir de vous communiquer mes réflexions . . . Autant qu'il m'est donné de pénétrer dans le véritable sens de vos belles recherches, je n'y rencontre aucune conclusion que je ne puisse vérifier par les points de vue, qui me sont particuliers, et que j'ai exposés, en partie, dans les deux publications intitulées: Saggio di interpretazione della geometria non euclidea et Theoria fondamentale degli spazii di curvatura costante, que j'ai eu l'honneur de vous adresser, il y a quelque temps.

Il n'y a qu'un point sur le quel j'ai à vous demander des lumières. Ce point .... Cette conclusion est confirmée, sans démonstration proprement dite, vers la fin (§. 4) de la note de Goettingue, où, cependant, elle est rapportée à un espace de trois dimensions. Or, cela paraîtrait en contradiction avec le fait, que j'ai démontré, ou que j'ai cru de démontrer, au sujet de la surface pseudosphérique (c'est à dire à mesure de courbure constante, mais négative), je veux dire le fait de l'étendue infiniment grande de cette surface en tous sens. Et ce qui me porterait à croire à la vérité de ce fait, c'est que toutes les autres propriétés de cette surface, déduites d'après le même ordre de considérations et de formules, ont été vérifiées par moi sur un cercle pseudosphérique du diamètre de 1,04 m que j'ai construit d'après un procédé approximatif, dont je publierai la description, et qui me semble très approprié à populariser les nouvelles conceptions sur la géométrie abstraite. Maintenant, voici la seule manière que j'ai entrevue, jusqu'à présent, pour mettre d'accord ces deux conclusions opposées. L'ensemble de mes déductions repose sur la représentation des surfaces par la formule de Gauss $ds^2 = Edu^2 + 2\,Fdudv + G\,dv^2$. Or, dans cette méthode les rapports de la surface et de l'espace environnant échappent entièrement: la surface est considérée en elle même, telle qu'elle le serait par un être, qui n'eût pas le sens de la troisième dimension. Il s'ensuit que, si la surface, telle qu'elle existe dans l'espace, se coupe elle-même le long de certaines lignes, cela est comme non-avenu d'après la formule précédente: la coincidence de deux points de la surface en un même point de l'espace est, en d'autres termes, un fait étranger, hétérogène à ceux que la formule de Gauss, à elle seule, peut nous apprendre. C'est précisément ici que l'on rencontre un des points d'attache entre l'oeuvre de Gauss et celle de Riemann; et, si je ne suis tout-à-fait dans l'erreur, c'est encore par le développement de cet ordre d'idées que l'on pourra comprendre, comment Gauss, sans quitter ce champ favori, pouvait pénétrer dans la géométrie de Bolyai et de Lobatchewsky; car en effet, sa géométrie des surfaces, tant qu'elle ne puise rien dans la géométrie analytique ordinaire, est indépendante du postulat XI. Mais revenons à la question.

Quand on cherche à passer de l'expression différentielle de l'élement linéaire à l'équation ordinaire de la surface, les exigences et les accidents des figures de deux dimensions, considérées dans l'espace de trois, reparaissent. Ce passage, c'est à dire l'intégration des surfaces à courbure négative constante (pour le cas de la courbure positive c'est la même chose), n'a pas encore été faite que dans des cas très particuliers, que je sache. On ne connait, parmi les formes infinies (dont mon petit modèle me donne l'agréable spectacle), que la surface pseudosphérique peut prendre, que des surfaces de rotation et des hélicoïdes. Or ces formes spécielles ont un caractère commun, c'est de ne pouvoir servir au développement de la surface entière; il faut, pour les produire, couper la surface suivant une ou deux lignes. Elles ne peuvent donc même en supposant, pour les surfaces de rotation, que la surface absolue y soit enroulée un nombre infini de fois sur elle-même, réproduire l'infinité en tous sens de la surface absolue.

Je suis donc obligé de supposer que vous ayez la preuve, ou du moins la très-forte présomption, que quelque forme concrète que l'on puisse donner à la surface pseudosphérique, toujours celle-ci doive être coupée, pour pouvoir les prendre, soit pour empêcher le déchirement des parties, qui depassent certaines limites (comme pour les surfaces spécielles citées), soit pour empêcher la rencontre de deux nappes différentes. Si l'on fait abstraction de ces difficultés, qu'on pourrait appeler d'ordre pratique, il me semble, que la surface, logiquement considérée, soit infinie, à la même manière du plan. Je croirais la même chose pour les espaces de courbure constante négative, sous les mêmes restrictions.

J'ai tenu à vous montrer que l'opposition, qui existe parmi vos resultats et les miens, ne m'a donné que le désir de connaître les considérations à l'aide desquelles le votre pouvait être établi. C'est le moindre des devoirs, qu'un éléve a à remplir vis à vis d'un maître."

Helmholtz erkannte sogleich sein Versehen, welches darauf beruhte, dass er wegen einer imaginären Constante einen Fall ausgeschlossen hatte, welcher einer reellen Deutung fähig war, und berichtigte schon wenige Tage später, am 30. April 1869, diesen Punkt in einer Mittheilung an den naturwissenschaftlichen Verein in Heidelberg.

Die philosophischen Consequenzen dieser Untersuchungen hatte Helmholtz, wie aus seinen Aufzeichnungen hervorgeht, schon damals gezogen, aber er hat dieselben erst im Zusammenhange entwickelt in seiner Rede über „die Thatsachen in der Wahrnehmung", welche er zur Stiftungsfeier der Friedrich Wilhelms-Universität zu Berlin im Jahre 1878 gehalten, und in der im „Mind" im April desselben Jahres veröffentlichten Note: „Ueber den Ursprung und Sinn der geometrischen Sätze; Antwort gegen Herrn Professor Land", welcher Helmholtz's Arbeit über die Axiome der Geometrie einer Kritik unterzogen hatte. Um den Zusammenhang mit den oben entwickelten Anschauungen zu wahren, möge der Inhalt dieser beiden Veröffentlichungen schon hier besprochen werden.

Die Grundprobleme der Erkenntnisstheorie „Was ist Wahrheit in unserem Anschauen und Denken? in welchem Sinne entsprechen unsere Vorstellungen der Wirklichkeit?" beschäftigten seit dem Anfange des neunzehnten Jahrhunderts Philosophie und Naturwissenschaften. Während die Philosophie alles aus den Einwirkungen der Körperwelt Stammende auszuscheiden und nur das zu behalten sucht, was der eigenen Thätigkeit des Geistes angehört, muss die

Naturwissenschaft, welche die Gesetze sucht für die Welt der Wirklichkeit, das absondern, was Definition, Bezeichnung, Vorstellungsform und Hypothese ist — beide vollziehen also dieselbe Scheidung, wenden jedoch verschiedenen Theilen ihr Interesse zu. Schon zur Zeit seiner ersten physiologisch-optischen Arbeiten hatte Helmholtz hervorgehoben, dass die Wahrnehmung von im Raume vertheilten Objecten das Anerkennen einer gesetzlichen Verbindung zwischen unseren Bewegungen und den dabei auftretenden Empfindungen einschliesst, und dass alles, was in der Anschauung zu dem rohen Material der Empfindungen hinzukommt, in Denken aufgelöst werden kann.

„Wenn „begreifen“ heisst Begriffe bilden, und wir im Begriffe einer Classe von Objecten zusammensuchen und zusammenfassen, was sie von gleichen Merkmalen an sich tragen, so ergiebt sich ganz analog, dass der Begriff einer in der Zeit wechselnden Reihe von Erscheinungen das zusammenzufassen suchen muss, was in allen ihren Stadien gleich bleibt.“

„Suchet den ruhenden Pol in der Erscheinungen Flucht“ war noch bis an sein Ende das Lieblingscitat, wenn er in die Fülle ungeordneter physikalischer Erscheinungen, die jeder Erklärung zu spotten schienen, Ordnung und Gesetz zu bringen sich bemühte. Was ohne Abhängigkeit von anderem, unabhängig von der Zeit gleich bleibt, ist für ihn die Substanz; das gleichbleibende Verhältniss zwischen veränderlichen Grössen ist das sie verbindende Gesetz — dieses nehmen wir direct wahr, der Begriff jener kann nur durch erschöpfende Prüfung gewonnen werden, bleibt jedoch immer problematisch. Wir erkennen das Gesetzliche als ein unabhängig von unserem Vorstellen Bestehendes an, als Ursache, die wir dann als Kraft bezeichnen, wenn wir das Gesetz als unserm Willen gleichwerthig anerkennen, und dieses als etwas den Ablauf der Naturprocesse Zwingendes erscheint. Das Gesetz, welches das Vertrauen auf die vollkommene

Begreifbarkeit der Welt ausspricht, ist das Causalgesetz, ein a priori gegebenes, transcendentales Gesetz, für welches die Erfahrung einen Beweis nicht liefern kann. „Künstler und Forscher streben, wenn auch in verschiedener Behandlungsweise, dem Ziele zu, neue Gesetzlichkeit zu entdecken.“

Ein Blatt in seinem Nachlass giebt uns eine nur flüchtig hingeworfene, aber äusserst interessante Analyse des thatsächlich vorhandenen Wissens:

„a) Des Inhaltes: 1. Unmittelbare reine Perceptionen sind nur die Sinnesempfindungen. 2. Die Anschauungsbilder äusserer individueller Objecte sind Inbegriffe einer grossen Zahl verschiedener Anschauungen. 3. Der Begriff eines daseienden Dinges enthält die Zuversicht ausgesprochen, dass ich bei geeigneten Bedingungen der Beobachtung stets wieder dieselben Sinneseindrücke von dem Dinge empfangen werde. 4. Die daseienden Dinge verändern sich, aber wir suchen und finden Gesetze für diese Veränderungen, d. h. Begriffe für dieselben, die selbst unverändert bestehen bleiben, aber nur in Wirksamkeit, d. h. Erscheinung treten, so oft die gleichen Bedingungen ihrer Wirksamkeit wieder hergestellt sind. Dadurch unterscheiden sie sich vom Dasein der Substanzen, deren Erscheinungsweise nur vom Beobachter abhängig betrachtet wird, die der Naturgesetze von den Veränderungen im Daseienden. 5. Die Aufstellung eines Naturgesetzes enthält die Zuversicht, dass in allen künftigen entsprechenden Fällen die Erscheinungen sich dem Gesetze fügen werden. Ein vollständiges Gesetz, welches die Bedingungen und die Grösse des Erfolges vollständig und genau angiebt, ist für unser Wissen der genügende Grund, sicher auf den Erfolg zu schliessen. Ebenso ist es dann objectiv anzusehen als Kraft, als der objectiv genügende Grund des Eintrittes. 6. Die naturwissenschaftlichen Hypothesen sind Versuche, Gesetze von einer weiter ausgedehnten Bedeutung zu finden, als die Beobachtungen unmittelbar erlauben.