Felix Klein

Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert

1. Band. — Berlin 1926

IV. Weiterentwicklung der algebraischen Geometrie

Hesse

Seite 159 – 161

Hesse wurde 1811 in Königsberg geboren. — Bei dieser Gelegenheit möchte ich nicht versäumen, auf eine merkwürdige Tatsache aufmerksam zu machen, das ist die außerordentlich große Zahl berühmter Mathematiker, die aus Königsberg stammen, wie denn überhaupt die ostpreußische Rasse mit besonderer Begabung in der Richtung unserer Wissenschaft gesegnet zu sein scheint. Rechnet man den Philosophen und Mathematiker Kant mit zu den Unsrigen, so ergibt sich folgende denkwürdige Liste: Kant 1724, Richelot 1808, Hesse 1811, Kirchhoff 1824, Carl Neumann 1832, Clebsch 1833, Hilbert 1862. —

Hesses Talent fand eine langsame Entwicklung an verschiedenen Schulen. 1840–55 war er Dozent in Königsberg, 1855–56 in Halle, 1856–68 in Heidelberg, schließlich 1868–74 in München an der technischen Hochschule. Die Königsberger Zeit bedeutet seine eigentliche Schaffensperiode. In Heidelberg schrieb er das weitverbreitete Lehrbuch: *Vorlesungen über analytische Geometrie*, durch welches der Sinn für elegante Rechnung mit symmetrischen Formeln in weite Kreise getragen wurde. Im übrigen war Heidelberg für Hesses Entwicklung nicht günstig. Er erlag dem Reiz der Neckarstadt, die zwar ein Platz geistiger Anregung, sehr viel weniger aber der angestrengten Arbeit ist. In dem durch den Dichter Viktor Scheffel bekannten Kreise verlebte Hesse wohl manche vergnügte Stunde — ist er doch in dem Gedicht „beide auf Nr. 8“ in „Gaudeamus“ verewigt worden —, aber seine mathematische Produktivität ging darüber in die Brüche. So fand Hesses Leben einen gewissermaßen tragischen Abschluß; in München wandte er sich wieder der schaffenden Tätigkeit zu, aber nur mit geteiltem Erfolg. Die Sicherheit, Richtiges und Falsches zu scheiden, war ihm abhanden gekommen.

Von Hesses Errungenschaften will ich hier nur diejenige nennen, durch die sein Name dauernd weiterlebt, das ist die sog. *Hessesche Determinante*, gebildet aus den zweiten Differentialquotienten einer homogenen Funktion f :

$$H = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & \ldots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & \ldots & f_{2n} \\ . & . & . & \ldots & . \\ . & . & . & \ldots & . \\ f_{n1} & f_{n2} & f_{n3} & \ldots & f_{nn} \end{vmatrix},$$

die in der Geometrie eine vielfache Anwendung gefunden hat. Bei linearer Transformation wird $H' = r^2 H$, wie sich ergibt, wenn man H einmal nach Horizontalreihen, einmal nach Vertikalreihen mit der Substitutionsdeterrninante r multipliziert. H ist also eine Invariante, oder — da es selbst die Variable noch enthält, sowie f von höherem als dem zweiten Grade ist — eine Kovariante von f.

Welchen Wert diese Kovariante bei geometrischen Betrachtungen besitzt und welcher Fortschritt für die Behandlung solcher Probleme über Plücker hinaus durch sie erreicht ist, das möchte ich an einem ganz einfachen Beispiel darlegen.

Beispiel: Wendepunkte einer ebenen Kurve $n-$ter Ordnung

Es handelt sich um die Bestimmung der *Wendepunkte einer ebenen Kurve n-ter Ordnung* mit der Gleichung $f(x, y) = 0$. Plücker hatte die Bedingung $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ in der in allen Lehrbüchern der Differentialrechnung auseinandergesetzten Weise in partielle Differentialquotienten von f umgesetzt. Er erhielt als Bedingung, in Jacobischer Schreibweise, das Nullsetzen der „geränderten“ Determinante

$$\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_x \\ f_{yx} & f_{yy} & f_y \\ f_x & f_y & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Dieser Ausdruck stellt eine Kurve $(3n - 4)$-ter Ordnung dar. Es könnte also scheinen, als ob die Kurve C_n gerade $n(3w - 4)$ Wendepunkte hätte. Plücker stellt nun die Überlegung an, daß die durch die Determinante gegebene Kurve mit jedem der n unendlichen Äste der vorgelegten C_n im Unendlichen eine Berührung habe, so daß also $2n$ Schnittpunkte, die keine Wendepunkte sind, abgezogen werden müssen; auf diese Weise erhält er die richtige Anzahl der Wendepunkte, nämlich $3n(n - 2)$.

Hier greift nun Hesse ein und zeigt, wie durch konsequenten Gebrauch homogener Variabler der Sachverhalt viel klarer herausgebracht werden kann.

Er setzt $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{x_2}{x_3}$ und wandelt die von Plücker angewendete Determinante, die nun heißt:

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_1 \\ f_{2l} & f_{22} & f_2 \\ f_1 & f_2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

um, durch Anwendung des Eulerschen Theorems über homogene Funktionen:

$$f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 = n \cdot f,$$

$$f_{11}x_1 + f_{12}x_2 + f_{13}x_3 = (n - 1)f_1 \quad \text{usw.}$$

Die mit $(n - 1)$ multiplizierte Plückersche Gleichung wird nun :

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{11}x_1 + f_{12}x_2 + f_{13}x_3 \\ f_{21} & f_{22} & f_{21}x_1 + f_{22}x_2 + f_{23}x_3 \\ f_1 & f_2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Nun kann man die beiden ersten Vertikalreihen, mit x_1 resp. x_2 multipliziert, von der dritten subtrahieren. Dann hebt sich der Faktor x_3 heraus, und man erhält:

$$x_3 \cdot \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = 0.$$

In derselben Weise kann man jetzt mit der letzten Horizontalreihe verfahren. Nach Unterdrückung des Zahlenfaktors $\frac{1}{n-1}$ ergibt sich

$$x_3^2 \cdot \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} = x_3^2 \cdot H = 0.$$

Der Faktor $x_3^2 = 0$ bezieht sich nun auf die beim Plückerschen Ansatz künstlich durch Überlegung ausgeschiedenen, der vorliegenden Frage fremden Schnittpunkte, die Gleichung $H = 0$, die von $3(n-2)$-tem Grade ist, bestimmt hingegen die gesuchten Wendepunkte als vollständigen Schnitt mit der vorgelegten C_n.

Wir sehen aus diesem Beispiel den Fortschritt der Methode und begreifen nun, daß Hesse es sich als eine Art Ideal aufstellte, durch homogenen symmetrischen Ansatz von vornherein alle Rechnungen so anzulegen und zu einem solchen Ende zu führen, daß der algebraische Prozeß das reine Gegenspiel der geometrischen Überlegungen würde. Seine besondere Aufmerksamkeit wendete er der Theorie der ebenen C_3 und C_4 zu, worauf wir noch zurückkommen werden.