Vorlesungen über Geschichte der Mathematik

von Moritz Cantor

Zweiter Band. - 2. Aufl.

Leipzig, 1899. - S. 608 - 648

XIV. Die Zeit von 1550 – 1600

---

(608)

69. Kapitel. **Rechenkunst und Algebra.**

Wir gehen zur Rechenkunst und zur Algebra über. Die Rechenbücher, mit denen wir es in den früheren Abschnitten zu thun hatten, waren fast durchgängig beiden gewidmet. Sie lehrten das gewöhnliche Rechnen oftmals gar in doppelter Art, so dass das Rechnen auf den Linien und das auf der Feder neben einander hergingen, sie lehrten auch Gleichungen ersten und zweiten Grades auflösen, enthielten überdies einen rechnend geometrischen Abschnitt. Gegen Ende der ersten Hälfte des XVI. Jahrhunderts gewann die Algebra an Ausdehnung. Rudolf und Stifel in Deutschland, Recorde in England, Cardano und Tartaglia in Italien schrieben Bücher, die fast lediglich der Lehre von den Gleichungen gewidmet (609)
waren. Dieser Umschwung vollzieht sich in der zweiten Hälfte des XVI. Jahrhunderts immer mehr. Wohl erschienen noch Rechenbücher, welche man ebensogut Lehrbücher der gesammten Mathematik nennen könnte, weil sie neben dem Zahlenrechnen die Lehre von den Gleichungen und Feldmesserisches in sich schliessen, aber eine Theilung der Ziele bringt mehr und mehr gesonderte Bearbeitungen hervor. Geometrie als solche haben wir weiter oben besprochen und haben dabei zum Voraus des Simon Jacob als Rechenmeisters gedacht (S. 581). Einige Jahre vor seinem Rechenbuche erschienen 1556 zwei allenfalls erwähnenswerthe Schriften, ein Hilfsbuch zur Berechnung des Silbergehaltes und des Silberwerthes von Johann

Marheld[1] in deutscher und ein ganz kurzgefasster Lehrgang des Rechnens mit Sexagesimalbrüchen nebst Anweisung zur Auflösung quadratischer Gleichungen von Kaspar Peucer[2] (1525–1602) in lateinischer Sprache. Das erstere ist ein mit Tabellen versehenes um nicht zu sagen aus Tabellen bestehendes Buch von einer Art, wie uns vorher noch keins begegnete. An dem zweiten ist nichts interessant als der Verfasser, ein Schwiegersohn Melanchthon's, der von 1554–1559 eine mathematische Professur in Wittenberg inne hatte und dann zur medicinischen Facultät überging. Er musste schwer unter dem Verdachte des Kryptocalvinismus leiden und brachte zwölf Jahre in harter Gefangenschaft auf der Pleissenburg in Leipzig zu. Er hatte vermuthlich Valentin Otho den Rath ertheilt (S. 602), Wittenberg noch rechtzeitig zu verlassen und an den Pfälzer Hof nach Heidelberg sich zu begeben.

Von Simon Jacob's Rechenbuch ist uns nur die vervollständigte Ausgabe von 1565 bekannt. So weit wie der Verfasser eines lateinischen Lobliedes, welches der Vorrede zum *New und wolgegründt Rechenbuch* unmittelbar folgt, möchten wir freilich nicht gehen. Er behauptet schlankweg, Koburg sei durch den dort geborenen Jacob zu gleicher Berühmtheit gelangt, wie die beiden anderen fränkischen Städte: Königsberg und Karlstadt durch Regiomontanus und Johannes Schoner und versündigt sich dadurch an Regiomontanus, aber immerhin ist Jacob's Rechenbuch besser als viele, vielleicht als die meisten ähnlichen Werke der gleichen Zeit. Jacob lehrt der Uebung folgend am Anfange auch das Linienrechnen, aber er ist sich der Umständlichkeit desselben wohl bewusst und weiss ferner, wo es passende Anwendung findet, wo nicht. *Wahr ist's, dass sie zu Haussrechnungen, da man viel Summierens, Aussgebens und Eynnemens bedarff, etwan förderlich* (610)
erscheinen, aber in Kunstrechnungen, die ein wenig etwas wichtig, zum offtenmal verhinderlich. Nicht sag ich, dass man auff den Linien dieselben Rechnungen nicht auch machen köndte, sondern so viel vortheils ein Fussgänger, der leichtfertig und mit keiner Last beladen ist, gegen einen, der unter einer schwären Last stecket, hat, so viel vortheils hat auch ein Kunstrechner auf oder mit den Ziphern für einem mit den Linien[3]. Damit entschuldigt es Jakob, dass er nunmehr vom Dividiren ab das Linienrechnen ganz bei Seite lasse. Er kennt[4] die Summe der Quadratzahlen in Gestalt der Formel $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{2n+1}{3}(1 + 2 + \cdots + 2n)$, sowie die der Kubikzahlen $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$ und beruft sich für den Beweis auf das 8. Buch der Arithmetik des Jordanus, welche mithin damals in Deutschland noch gelesen wurde. Die Berufung ist hier allerdings nicht glücklich gewählt, oder mindestens nicht hinreichend begründet, denn im 8. Buche der genannten Arithmetik kommt weder die Summenformel der Quadratzahlen noch, die der Kubikzahlen vor. Jacob musste desshalb sagen, auf welche Sätze jener Beweis sich stützen solle. Im 2. Theile ist das Dreieck der Binonaialcoeffi-

[1] Kästner I, 131.
[2] Ebenda I, 131–132. Allgem. deutsche Biographie XXV, 552–556, Artikel von Wagenmann.
[3] New und wolgegründt Rechenbuch fol. 10 verso.
[4] Ebenda fol. 15 verso bis 16 recto.

cienten[5] bis zu denen der 11. Potenz nicht in der Form wie bei Stiefel, dagegen ganz ähnlich wie in Tartaglia's General Trattato von 1556 abgedruckt mit dem einzigen Unterschiede, dass bei Tartaglia die Coefficienten bis zu denen der 12. Potenz sich erstrecken. Jacob beruft sich auf Vorgänger — *und wirt diese Tafel von etlichen also gemacht* — wo er die Enstehungsweise

$$\binom{m}{k} + \binom{m}{k+1} = \binom{m+1}{k+1}$$

mittheilt. Einige unbestimmte quadratische Aufgaben[6] sind so gelöst, dass die an bestimmt gegebenen Zahlen gelehrte Vorschrift zugleich als allgemein giltig bezeichnet ist. $(\frac{a}{2})^2 + 1$ sei eine Zahl, welche um die gegebene Zahl a vergrössert oder verkleinert zur Quadratzahl werde; $(\frac{a+b+1}{2})^2 - a$ werde zur Quadratzahl, wenn man entweder die gegebene Zahl a addire, oder die gleichfalls gegebene Zahl b subtrahire; $(\frac{d+1}{2})^2$ und $(\frac{d-1}{2})^2$ seien zwei Quadratzahlen von der gegebenen Differenz d u.s.w. Auf diese wenigen von uns besonders hervorgehobenen Dinge beschränkt sich keineswegs das Interesse von Jacob's Rechenbuch. Ungemein viele kaufmännische Aufgaben, Gesellschaftsrechnungen, Mischungsrechnungen, (611)
zusammengesetzte Proportionen und dergleichen sind behandelt, wobei die welsche Praktik nicht zu kurz kommt. Der dritte Theil gehört der Geometrie an, und von ihm war im 68. Kapitel die Rede.

Rechenmeister, wenn auch nicht alle Jacob ebenbürtig, gab es damals in Deutschland, wo man hinblickte. Eine Stadt dürfte aber noch besonders namhaft gemacht werden, in welcher ***eine vollständige Rechenschule*** entstanden war: ***Ulm***[7]. Diese Reichsstadt wetteiferte hierin wie in Vielem mit Nürnberg. Die Ulmer Schule ist begründet durch Conrad Marchtaler, der sich 1545 von Wittenberg, wo er studirte, wo ihm aber die Mittel zum längeren Verweilen ausgingen, dem Ulmer Rathe zur Errichtung einer Rechenschule anbot, ein gern und rasch angenommener Vorschlag. Marchtaler's Nachfolger hiess Gallus Spänlein. Dann war Johannes Kraft 1597 Modist und Rechenmeister. Er verfasste mehrere Lehrbücher, die sehr verbreitet waren. Gleichzeitig war auch ein gewisser David Selzlin Rechenmeister, der Lehrer eines bekannteren Schülers, von dem wir im XV. Abschnitte reden: Johann Faulhaber.

In Frankreich sind Schriften von Pierre Forcadel[8] (S. 549) nennenswerth. Eine 1556–1557 erschienene dreibändige *Arithimétique* enthält manches Eigenthümliche. Zahlentheoretische Aufgaben, wie z. B. die Auflösung von $x^3 + x^2 = y^2$ mittels $x = z^3 - 1$, $y = z(z^2 - 1)$ stehen schon im ersten Bande. Ebendort wird die 5. Potenz der Unbekannten bald *quatriesme quantité* bald

[5] Ebenda fol. 104 verso.

[6] Ebenda fol. 239 recto.

[7] Ofterdinger, Beiträge zur Geschichte der Mathematik in Ulm bis zur Mitte des XVII. Jahrhunderts (Ulm 1867).

[8] Fontès in den Mémoires de L'Académie des Sciences, Inscriptions et Belles-lettres de Toulouse, Série 9, T. VI (1894), VII (1895), VIII (1896).

cinquiesme produit genannt. Die Binomialcoefficienten sind im dritten Bande als die Ziffern der auf einander folgenden Potenzen von 11 erkannt. Das ist sofort ersichtlich bei $11^1 = 11$, $11^2 = 121$, $11^3 = 1331$, $11^4 = 14641$. Bei der 5. Potenz hilft sich Forcadel dadurch, dass er gewissermassen zweiziffrige Ziffern einführt und

$$\begin{array}{cccccc} & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\ \hline \\ 1 & 5 & (10) & (10) & 5 & 1 \end{array}$$

als das Product von $11 \cdot 14641$ betrachtet. Eine *Arithmetique par les geets* von 1558 ist ein Lehrbuch des Linienrechnens.

Das Linienrechnen lehrte auch Jean Trenchant in seinem 1566 in Lyon gedruckten Buche *L'arithmétique departie en trois livres. Ensemble un petit discours des changes avec l'art de calculer aux jetons*[9], von dessen Beliebtheit Aus- (612)
gaben von 1571, 1588, 1602, 1632 zeugen. Jean Trenchant hat auch Zinstafeln herausgegeben[10].

Petrus Ramus mit seinen *Scholae mathematicae* von 1569 verdient hier gleichfalls einen kleinen Platz. Bei den Gesprächen des Verfassers mit Kaufleuten, welche er bei seinen Spaziergängen besuchte (S. 565), lernte er mancherlei unbedeutende Rechenvortheile, welche er schildert. Wir brauchen ihm darin nicht zu folgen. Das Einzige, was wir dem Buche entnehmen möchten, ist die lakonische Art, in welcher das Multiplikationsergebniss: Minus mal Minus giebt Plus, gerechtfertigt wird: *E duabus negatis fit affirmatus, quia multiplicator non est integer*[11], aus zwei Negativen wird ein Positives, weil der Multiplicator nicht vollständig ist. Als Beispiel dient

$$(8-9)\cdot(8-9) = -72 + 81 + 64 - 72 = 1.$$

Hier ist uns im Drucke zuerst ein Anklang an das Wort ***negativ*** begegnet, und dem Dialectiker, welcher den Satz kannte, dass zwei Negationen bejahen, lag die Benutzung gerade dieses Ausdruckes nahe. Handschriftlich können wir das Wort etwas weiter zurückverfolgen.

Eine Handschrift der Göttinger Bibliothek, welche in den Jahren 1545–1548 geschrieben ist und einst dem 1574 verstorbenen Mathematiker und Schreibkünstler Stephan Brechtel[12] gehörte, enthält eine muthmasslich auf eine viel ältere Quelle zurückweisende Algebra, die der Namen *numeri affirmativi* und *negativi* sich bedient.

Ein Schüler des Ramus war Salignac[13], ein zweiter Urstisius[14], deutsch

[9] B. Boncompagni im *Bulletino Boncompagni* I, 150 Note.

[10] Bierens de Haan, *Bouwstoffen* etc. II, 186.

[11] *Scholae mathematicae* pag. 269.

[12] Doppelmayr S. 203.

[13] Kästner I, 136–139.

[14] Ebenda I, 139–143.

WURSTEISEN (1544–1588), von welchen jener 1575, dieser 1579 ein lateinisches Rechenbuch herausgab, an welchen nichts bemerkenswert erscheint, als die grosse Verehrung ihres Lehrers, welchem übrigens Salignac doch Fehler nachweist.

Eine herzlich unbedeutende Arithmetik und eine Algebra, der man kein besseres Zeugniss auszustellen vermag, hat LAZARUS SCHONER[15], ein Sohn von Andreas und Enkel von Johannes Schoner, 1592 herausgegeben. Als Verfasser ist Petrus Ramus genannt, als eine eigene Zugabe des Herausgebers ist aber ein Buch über figurirte Zahlen und ein anderes über das Rechnen mit Sexagesimalbrüchen bezeichnet[16]. Unter figurirten Zahlen versteht Schoner solche, welche durch Multi- (613)
plication entstanden sind, die Factoren werden Seiten genannt[17]. Eine einzige Bemerkung des Buches lohnt die Mühe des Durchlesens. Schoner beruft sich nämlich einmal auf den 33. Satz des **Algorithmus demonstratus des Jordanus**[18]. Damit ist festgestellt, dass der Enkel dessen, welcher 1543 den Algorithmus demonstratus herausgab, die Ueberzeugung besass, jene Schrift stamme von Jordanus, und dass er ohne weiteren Zusatz, gleichsam als seinen Lesern hinlänglich bekannt, jener Ueberzeugung Worte lieh. Bedürfte es äusserer Bestätigung für die gegenwärtige Annahme, wer den Algorithmus demonstratus verfasste, so wäre sie, scheint es, hier schwerwiegend gegeben.

Von TARTAGLIA's General Trattato (S. 517) scheint der erste Band wiederholt besonders herausgegeben worden zu sein. Eine Ausgabe[19] führt z. B. den Titel: Tutte l'Opere d'Arithmetica del Famosissimo Nicolo Tartaglia (Venedig 1592–1593). Ein ähnlicher, aber natürlich älterer erste Band wurde vielleicht 1577 in Frankreich unter dem Namen der Arithmetik des Tartaglia von einem GUILLAUME GOSSELIN[20] ins Französische übersetzt und mit Erläuterungen versehen. Welcher Art diese sind, mag an einem Beispiele klar werden, welches überdies sehr an dasjenige erinnert, was wir erst aus den Scholae mathematicae des Ramus vorführten. Es sei

$$6 = 8 - 2 = 10 - 4,$$

also müssen $(8 - 2) \cdot (10 - 4) = 36$ sein, und es komme nur heraus, wenn Minus mal Plus Minus und Minus mal Minus Plus gebe. Ob es ein anderer GOSSELIN mit dem Vornamen PIERRE war, der 1577 in Paris ein Werk *De arte magna* herausgab, und ob dieses Werk in seinem Titel eine Abhängigkeit von Cardano verrathen sollte, wissen wir nicht.

FRANCISCUS MAUROLYCUS (S. 558) hat 1575 in Venedig eine Arithmetik in

[15] DOPPELMAYR S. 81 Note g.

[16] *Petri Rami Arithmetices libri duo et Algebrae totidem a Lazaro Schonero emendati et explicati. Eiusdem Schoneri libri duo: alter, de Nuneris ftguratis; alter de Logistica sexagenaria* (Frankfurt 1592).

[17] *Figuratus dicitur numerus multiplicatione factus: eiusque factores dicuntur latera* (pag. 217).

[18] pag. 234 lin. 16–17.

[19] G. WERTHEIM brieflich.

[20] KÄSTNER I, 197–200. — POGGENDORFF I, 929–930.

zwei Büchern herausgegeben, welche wir wegen eines darin vorkommenden neuen Untersuchungsgegenstandes nebst zugehörigem Kunstausdrucke erwähnen. Sei $p(n)$ eine n^{te} Vieleckszahl, so nennt Maurolycus deren Product in n eine *columna*, Säule, und leitet eine ganze Reihe von Sätzen über solche Säulen von Polygonalen her[21].

Kaum mit solchen minderwerthigen Leistungen vergleichbar, jedenfalls einen ganz anderen wissenschaftlichen Standpunkt einnehmend, sind die arithmetischen (614)
Schriften von SIMON STEVIN. Bereits 1584 hat er **Zinstafeln** dem Drucke übergeben[22], welche mit vlämischem Texte in Leiden angefertigt und dem Bürgermeister dieser Stadt gewidmet waren, wenn auch der Druck in Antwerpen in der berühmten Plantin'schen Druckerei erfolgte. In der Leidner Werkstätte des gleichen Hauses erschien alsdann 1585 ein stärkerer Band, vier Schriften in französischer Sprache enthaltend[23]: eine *Arithmétique*, die vier ersten Bücher des Diophant, eine *Practique d'Arithmétique* und eine Abhandlung, welche den Titel *La Disme* führte, und welche laut einer Vorbemerkung ursprünglich vlämisch niedergeschrieben war. Hier haben wir es mit den beiden letzten Schriften des Bandes zu thun, da die *Ariihmétque*, eigentlich eine Algebra, erst nachher zur Rede kommt, die Diophantbearbeitung schon (S. 552) erwähnt wurde.

Die *Practique d'Arithmétique* lehrt alle Rechnungen ausführen, welche die Regeldetri zur Grundlage haben, und die nicht im kaufmännischen Leben vorkommen. Als Schriftsteller, welche Derartiges erfolgreich gelehrt haben, nennt Stevin Namen aus verschiedenen Ländern[24], abermals ein Zeugniss dafür, wie völkergemeinsam damals bereits mathematische Schriften waren. CARDANO, STIFEL, TARTAGLIA, GEMMA FRISIUS, CUTHBERT TONSTALL sind die Erwähnten und wenn ausserdem JUAN PERIS DE MOYA auftritt, so ist das in den damals noch fast spanischen Niederlanden begreiflich. Ueberdies hat die *Aritmetica practica y especulativa* dieses Schriftstellers nur innerhalb der Zeit von 1609 bis 1761 dreizehn Auflagen erlebt[25]. In einer noch älteren Ausgabe von 1590 findet sich auf fol. 227 die Ausziehung der Quadratwurzel unter Anwendung der von Chuquet erfundenen Regel der mittleren Zahlen (S. 352), welche De Moya aus dem vielverbreiteten Lehrbuche des De la Roche (S. 371–374) kennen gelernt haben dürfte[26]. Stevin bezog sich auf den früher erschienenen *Tratado di matemáticas* (Alcala 1573). In letzterem ist auch über die Darstellung der Zahlen mittels Fingerbiegung bei den Arabern gehandelt[27]. DE MOYA ist, wie wir hier einschaltend erwähnen[28], in der Sierra Morena in St. Stefano geboren und war Canonicus in

[21] G. WERTHEIM in der Zeitschr. Math. Phys. XLIII, Histor.- literar. Abthlg. S. 42.

[22] QUETELET pag. 147.

[23] Ebenda pag. 159 Note 1.

[24] STEVIN I, 181.

[25] G. VICUIA in der Bibliotheca mathematica, 1890, pag. 35.

[26] G. WERTHEIM, Die Berechnung der irrationalen Quadratwurzeln und die Erfindung der Kettenbrüche in Zeitschr. Math. Phys. XLII, Supplementheft S. 150.

[27] *Bulletino Boncompagni* I, 312–313.

[28] Vergl. *Bibliotheca Hispana nova auctore D. Nicolao Antonio Hispalensi I. C.* (Madrid 1783)

Granada. Das Hauptgewicht legt Stevin in der *Practique d'Arithmétique* auf Zinstafeln, welche hier in neuem Abdrucke und mit sachlich, nicht bloss sprachlich (615)
verändertem Texte erscheinen[29]. Es sind, genauer gesagt, Rabattirungstafeln, welche den Baarwerth einer Forderung von 10 000 000 erkennen lassen, welche erst in 1, 2 bis 33 Jahren fällig zu Zinseszins auf die Gegenwart zurückzuführen ist. Der Zinsfuss ist zunächst in ganzen Procenten als l, 2 bis 16procentig angenommen, dann in Stammbrüchen des Kapitals als $\frac{1}{15}$, $\frac{1}{16}$ bis herab zu $\frac{1}{22}$ wofür die Ausdrücke dienen *au denier 15, au denier 16* bis zu *au denier 22*, d. h. 1 & Zins für 15, 16, ... 22 & Kapital. Wird umgekehrt nach der Summe gefragt, zu welcher ein Kapital in einer gegebenen Zeit bei Zinseszins zu einem gegebenen Procentsatze anwächst, so soll man mittelbaren Gebrauch von den Tafeln machen. Ist z. B. vermöge derselben 6005739 der Baarwerth von nach 13 Jahren fälligen 10 000 000 bei 4%, so wächst das Kapital K zu 4% in 13 Jahren zu $\frac{10\,000\,000}{6\,005\,739}K$ an. Auch Zeitfragen werden beantwortet[30]. In welcher Zeit wird 800 zu $\frac{1}{17}$ Zins zu 2500? Wir verändern 2500 in 10 000 000, mithin 800 in 3 200 000 und suchen diese Zahl in der Tafel von $\frac{1}{17}$ Zins. Bei 19 Jahren steht dort 3 375 605, also ist die gesuchte Zeit länger als 19 Jahre. Den überschüssigen Bruchtheil eines Jahres soll man folgendermassen suchen. Es fand sich eine um $3\,375\,605 - 3\,200\,000 = 175\,605$ zu grosse Zahl; 3 200 000 giebt zu $\frac{1}{17}$ im Jahre $\frac{3\,200\,000}{17}$ Zins; 170 605 Zins entstehen also in $\frac{17 \cdot 175\,605}{3\,200\,000} = \frac{2\,985\,285}{3\,200\,000}$ Jahren. Allerdings kleidet Stevin seine Regel etwas anders ein. Statt den Ueberschuss so zu suchen, wie wir es thaten, vervielfacht er das ganze 3 375 605 mit 17 und dividirt dieses Product durch 3 200 000, wobei als Quotient $17\frac{2\,985\,285}{3\,200\,000}$ erscheint, und von diesem Quotient müsse man immer die ganze Zahl, hier also 17, weglassen[31]. Ist die Frage nach dem Zinsfusse gestellt, mittels dessen etwa 1000 in 7 Jahren zu 2000 geworden sind, so sollen die Tafeln folgendermassen genutzt werden[32]. Statt 2000 muss 10 000 000, also statt 1000 die Zahl 5 000 000 gesetzt werden, und nun suche man, in welcher Tabelle beim 7. Jahre 5 000 000 stehe. Bei 10% findet sich 5 131 582, bei 11% steht 4 816 585, also ist der Zinsfuss zwischen 10 und 11%, näher bei 10 als bei 11.

Nach der Practique d'Arithmétique kommt auf nur sieben Seiten eine Abhandlung[33], welche den vielsagenden Titel führt: *La Disme enseignant facilement expe-* (616)
dier par nombres entiers sans rompuz tout comptes se rencontrans aux affaires des Hommes. Ohne Brüche, nur mittels ganzer Zahlen sollen alle Rechnungen, welche im menschlichen Geschäftsleben vorkommen, ausgeführt werden! Wir wissen heute, dass dieser Ausspruch wirklich gewagt werden durfte, dass Decimalbrüche in der That das leisten, was Stevin versprach. Er war von der grossen Bedeutung des in der *Disme* Gelehrten durch und durch erfüllt. Am Schlusse macht er es

I, 757.

[29]Stevin I, 191–197.

[30]Ebenda I, 199.

[31]*lesquels 17 on delaissera pour reigle generale.*

[32]Stevin I, 201.

[33]Ebenda I, 206–213.

den Regierungen zur Pflicht, das Ihrige zu thun, um das neue Rechnen zu einem in allen Fällen unmittelbar anwendbaren zu machen; er verlangt mit dürren Worten Decimaltheilung der Münzen, der Maasse, der Gewichte. Möge, fährt er fort, die Einführung der Decimalbrüche vielleicht nicht so bald in Aussicht stehen, als er es wünsche; das sei sicher, dass ein künftiges Geschlecht, wenn nur die Menschennatur die gleiche bleibe, nicht immer einen so grossen Vortheil ausser Acht lassen werde[34]. Er ahnte nicht, dass es noch zwei Jahrhunderte dauern sollte, bis man anfing, seinen Plan zu verwirklichen, trotzdem möglicherweise ein hervorragender Kirchenfürst, Bischof Ernst von Baiern[35] zu Köln ähnliche Gedanken hegte, zum Mindesten wie Adrian van Roomen in einer Vorrede von 1609 erzählt hat, alle Maasse und Gewichte auf eine einzige geometrische Reihe gründen wollte[36]. Wir greifen mit diesem Zwischensatze in eine damals weit entlegene Zukunft vor, wir thun es, um das ganze Gewicht der Stevin'schen Leistung auf uns wirken zu lassen. Der Gedanke decimaler Theilung und decimaler Rechnung, konnte man einwerfen, sei nicht neu gewesen. Gewiss, seit Jahrhunderten hatte das eine Verfahren zur Auffindung angenäherter Wurzelwerthe, hatte die Einrichtung von Sinustafeln, in welchen die Länge des Halbmessers durch eine mit Nullen versehene Einheit dargestellt wurde, darauf vorbereitet. Aber decimal leicht aussprechbare Längen und sogar die Benutzung von Brüchen, deren Nenner aus Einheiten mit Nullen bestehen, sind noch keine Decimalbrüche. Dazu gehört ein Weiteres: die Anwendung der Stellung zur Bezeichnung des verminderten Werthes der einzelnen Zahlzeichen, das darauf beruhende Weglassen der Nenner, und will man daran erinnern, dass auch dieser Gedanke nichts weniger als neu war, dass er bei der fortgesetzten Sexagesimaltheilung der Winkelgrade seit Jahrtausenden bereits in Uebung war, so mag Stevin vielleicht an diese Anregung (617) gedacht haben; aber seiner Erfindung ist dadurch, möchten wir sagen, nur höherer Wert beigelegt; denn warum haben jene Jahrtausende nicht geleistet, was Stevin als nothwendig erkannte? So ganz vollständig ist allerdings das Wegbleiben der Nenner bei Stevin noch nicht. Er benutzt noch nicht ein Pünktchen oder Komma, um die Einer von den Decimalbruchstellen zu trennen. Er schreibt vielmehr von der Einheitsstelle an jeder Stelle **zur Rechten** ein Rangzeichen bei, welches in einer eingeringelten Zahl besteht. Eine eingeringelte 0, l, 2, 3 bezeichnet die links davon befindliche Stelle als Einer, Zehntel, Hundertstel, Tausendstel, z.B. 237 ⓪ 5 ① 7 ② 8 ③ bedeutet ihm $237\frac{578}{1000}$. Aber er sieht doch bereits die Möglichkeit einer kürzeren Schreibweise, denn 54 ② bedeutet ihm schon $\frac{54}{100}$ und in der *Practique de Geometrie*, welche in einzelnen Theilen vielleicht auch bis 1585 zurückgeht (S. 572), findet sich[37] 707 ② für $7\frac{7}{100}$. Bei der

[34] *Il est certain gue si les hommes futurs sont de telle nature comme ont este les precedens qu'ils ne seront pas tousiours negligens en leur si grand avantage.*

[35] Allgemeine Deutsche Biographie VI, 250–257. Artikel von Ennen.

[36] Le Paige, *Notes pour servir à l'histoire des mathématiques dans l'ancien pays de Liège* in dem Bulletin de l'institut archeólogiques Lièegeois XXI, 490–491.

[37] Stevin II, 390 letzte Zeile.

Ausführung der Rechnungen, der Additionen, Subtractionen, Multiplicationen, Divisionen, werden die eingeringelten Stellenzeiger **über** die betreffenden Ziffern gesetzt und gelten beispielsweise bei der Addition für sämmtliche Posten, sowie für die aus ihnen gebildete Summe, wodurch die Vereinfachung der Schreibweise sich noch erhöht:

		⓪	①	②	③
	2	7	8	4	7
	3	7	6	7	5
8	7	5	7	8	2
9	4	1	3	0	4

Was für Stevin die eigentliche Bedeutung der eingeringelten Stellenzeiger war, werden wir bei Besprechung seiner algebraischen Leistungen sehen.

Ein ***Pünktchen*** oder eine den Einern ihre Wölbung zukehrende ***Halbklammer zur Abgrenzung von Decimalstellen*** scheint zuerst Joost Bürgi[38] (1552–1632 oder 1633) benutzt zu haben. Er war Schweizer von Geburt, brachte aber den grössten Theil seines Lebens in Kassel und Prag zu. In Kassel war Bürgi Hofuhrmacher des um die Sternkunde hoch verdienten Landgrafen Wilhelm IV., in Prag kaiserlicher Kammeruhrmacher. Dort stand er in persönlichen Beziehungen (618)
zu Kepler. Im Jahre 1622 kehrte Bürgi nach Kassel zurück, wo er den Abend seines Lebens verbrachte. Von den Schreibweisen des Namens Bürgi, Burgi, Byrgi ist durch Funde im St. Galler Archive die erste als die richtige gesichert, wenigstens hat seit dem XVI. Jahrhunderte die Familie stets nur Bürgi geheissen. Die lange Lebenszeit Bürgi's und noch mehr die verschiedenartigen Verdienste um derenwillen die Geschichte der Mathematik sich mit ihm zu beschäftigen hat, macht es nothwendig, ihn ausser im XIV. auch noch im XV. Abschnitte zu behandeln. Hier haben wir es zunächst nur mit dem Rechner Bürgi zu thun. Was wir von seiner Bekanntschaft mit Decimalbrüchen oben angedeutet haben, beruht zum Theil auf einer nur handschriftlich vorhandenen *Arithmetica*[39], welche wahrscheinlich kurz nach dem im August 1592 erfolgten Tode des Landgrafen Wilhelm IV., von dem in der Vorrede mit dem Beiworte „hochselicher Gedächtniss" die Sprache ist, verfasst wurde, und welche mit dem Kepler'schen Nachlasse auf die Bibliothek von Pulkowa kam, der sie noch angehört, zum wesentlicheren Theile auf der Aussage von Kepler. Letzterer sagt in seinem 1616 veröffentlichten *Auszug aus der uralten Messe-Kunst Archimedis*[40]), wo er jene Halbklammer den Lesern erklärt: „diese Art von Bruchrechnung ist von Jost Bürgen zu der sinusrechnung erdacht". Darnach müsste man auch Bürgi's Unabhängigkeit von

[38] Rud. Wolf, Biographien zur Kulturgeschichte der Schweiz (Zürich 1858) I, 57–80. Derselbe, Astronom. Mittheilungen Nr. LXXII und LXXXI. Derselbe, *Bibliotheca mathematica* 1889 p. 33. Derselbe, Handbuch der Astronomie, ihrer Geschichte und Litteratur (Zürich 1890) 86–88 und 173–175.

[39] Ein Auszug von Rud. Wolf in dessen Astronom. Mittheilungen Nr. XXXI.

[40] *Opera Kepleri* (ed. Frisch) V, 547.

Stevin annehmen, was bei einem ohne wesentlichen Unterricht Aufgewachsenen[41] glaubhaft ist. In der handschriftlichen Arithmetik dient eine unter der Einerstelle befindliche 0 bisweilen als Abtheilungszeichen $\genfrac{}{}{0pt}{}{1414}{0} = 141\frac{4}{10}$. Am gleichen Orte wird die **abgekürzte Multiplication** gelehrt, wofür das Beispiel sich findet

$$\begin{array}{r|l}
\multicolumn{1}{r}{01234} & \\
\multicolumn{1}{r}{12358} & \\
\cline{1-1}
01234 & \\
0246 & 8 \\
037 & 0 \\
06 & 1 \\
0 & 9 \\
\hline
01525 &
\end{array}$$

Hier ist allerdings kein Abtheilungszeichen, und man muss aus dem Ergebnisse folgern, dass eigentlich 0,1234 und 1,2358 die Factoren sind welche das Product (619)
0,1525 liefern. In Uebereinstimmung mit Kepler's Aussage ist die (S. 604) angeführte Thatsache, dass Pitiscus im Tabellenanhange seiner Trigonometrie von 1608 sowie von 1612 (nicht in den früheren Auflagen) das Decimalstellen abtrennende Pünktchen benutzt hat. In derselben Ausgabe seiner Trigonometrie S. 44 nennt aber Pitiscus den Bürgi in einer Weise, als ob er dessen Unterricht genossen hätte, wenn wir auch nicht anzugeben wissen, wo das stattgefunden haben sollte. Es mag für die Einführung jenes Decimalpünktchens nicht unerinnert bleiben, dass längst bevor man Decimalbrüche schrieb, Pünktchen benutzt wurden, um in sehr grossen Zahlen Gruppen von bald je drei, bald je vier Stellen abzugrenzen. Prätorius hat in seiner Handschrift von 1599 (S. 589) unzweifelhaft selbständig unter der Ueberschrift *Compendiosa multiplicatio duorum inter se sinuum quando factus per 1000 etc. dividendus est* die abgekürzte Multiplication deutlicher und genauer als Bürgi gelehrt[42].

Neben Vieta, Stevin, Bürgi, Prätorius ist ein fünfter Bewerber um die selbständige Erfindung der Decimalbrüche vorhanden: Johann Hartmann Beyer[43] (1563–1625) aus Frankfurt am Main. Dieser veröffentlichte 1603 eine mehrfach neu aufgelegte *Logistica decimalis, das ist die Kunstrechnung mit den zehnteiligen Brüchen.* Beyer nimmt deren Erfindung ausdrücklich für sich in Anspruch. Er bemerkt, es habe ihn, indem er sich zuweilen in den mathematischen Künsten erlustiret, die Praxis der Astronomen, geringere Theile als Grade mit 60theiligen Scrupeln zu messen, auf den Gedanken gebracht, dass statt der sechzigtheiligen Brüche, welche einen mühsamen Calculum erfordern, wohl auch eine

[41] In der Vorrede zur handschriftlichen Arithmetik sagt Bürgi von sich: „der ich doch Griechischer und lateinischer Sprach unerfahren und derohalben die Jenige, wölliche hiervon geschrieben in Irer rechten Sprach nit vernehmen khönde." Wolf, Astron. Mittheil. Nr. XXXI S. 9.

[42] Curtze in Zeitschr. Math. Phys. XL, Histor.-liter. Abthlg. S. 7–11.

[43] Poggendorff I, 183. — Unger S. 105, dem wir die Beschreibung der *Logistica decimalis* wörtlich entnehmen.

andere Denomination anwendbar, und dass hierzu die 10 eine sonderlich bequeme und gleichsam privilegirte Zahl sei, welche im Addiren, Subtrahiren, vornehmlich aber im Multipliciren und Dividiren grosse, bei keiner andern Zahl zu findende Vorteile gewähre. Beyer nennt die Bruchtheile: erste, zweite, dritte ... Zehnder, oder erste, zweite, dritte ... Scrupel, oder Primen, Secunden, Terzen ... und bezeichnet sie durch überschriebene Indices, nach den Ganzen setzt er einen Punkt: $\overset{v}{8.798}$ bedeutet bei ihm also $8\frac{798}{100000}$. Darüber, dass Beyer die Stevin'schen Schriften gekannt hat, Zweifel nicht möglich. Die Ausdrücke Prime, Secunde u. s. w. zeigen eine auffallende Aehnlichkeit mit der Practique d'Arithmetique[44]. Ueberdies ist (620)
auf S. 113 von Beyer's Logistica decimalis sogar von Johann Semsen[45] Decimalrechnung (auss Anweisung Simon Stevins) im 3., 4., 5. und 6. cap. lib. Geodaes. ausdrücklich die Rede[46].

Von Stevin's Schriften sei gegenwärtig noch eine erwähnt, *De Apologistica Principum Ratiocinio Italico*, welche 1605 in dem II. Bande der Hypomnemata mathematica erschien[47]. Rechnung der Fürsten nach italienischer Weise hat man den Titel übersetzt. Es ist ***die Anwendung der doppelten Buchführung auf den Staatshaushalt***. Stevin hatte für die Hofhaltung des Prinz Moritz von Nassau italienische Buchführung eingerichtet, welche ihm entweder aus den Schriften italienischer oder niederländischer und deutscher Gelehrten, oder wahrscheinlicher durch eigene Uebung während der Zeit, in welcher er kaufmännisch sich bethätigte, bekannt war. Waren doch in Nachahmung der Italiener Anleitungen zur doppelten Buchführung von Jan Ympyn 1543, von Valentin Mennher aus Kempten 1550 und 1565 in vlämischer und in französischer Sprache in Antwerpen im Drucke herausgekommen, und waren doch bei Mennher die unpersönlichen Conti neben den persönlichen in fortwährendem Gebrauche[48]. Jetzt wünschte Stevin die Anwendung des in kleineren Verhältnissen Erprobten in einem grossen Staatswesen einzuführen und wandte sich desshalb an den französischen Staatsmann Sully, der ja gerade dem Finanzwesen die grösste Aufmerksamkeit schenkte. Ihm widmete er die Schrift, welche zur Empfehlung jener Buchführung dienen sollte. Wesentlich ist derselben nicht nur das ***doppelte***

[44] Stevin I,.208 Definition 3: *Et chasque dixiesme partie de l'unité de commencement nous la nommons Prime; et chasque dixiesme partie de l'unité de Prime nous la nommons Seconde, et ainsi des autres chasque dixiesme partie de l'unité de son signe precedent tousiours en l'ordre un d'avantage..*

[45] Johann Sems, ein Niederländer, verfasste gemeinsam mit Joh. Pietersen Dou eine später auch ins Deutsche übersetzte Geodäsie. Kästner III, 291–293.

[46] Hunrath in Neue philologische Rundschau (herausgegeben von Wagner und Ludwig) 1892, S. 235.

[47] Der II. Band der Hypomnemata erschien 1605, der I. erst drei Jahre später 1608. Der Grund lag darin, dass die Schriften des I. Bandes noch ins Lateinische zu übersetzen waren, während die des II. Bandes ursprünglich lateinisch verfasst waren. Ueber die Apologistica vergl. Kästner III, 408–410 und Jäger, Lucas Paccioli und Simon Stevin (Stuttgart 1876), S. 109–137.

[48] Kheil, Ueber einige ältere Bearbeitungen des Buchhaltungs-Tractates von Luca Paccioli (1896) und Kheil, Valentin Mennher und Antich Rocha (1896).

Eintragen jedes einzelnen Postens, der einmal in einem Soll, das andere Mal in einem Haben vorkommen muss, sondern auch die Einführung der vorerwähnten ***unpersönlichen Conti***. Gerade diese letzteren — z. B. in einem Geschäfte, welches überseeische Producte führt, die Anlegung eines Kaffeeconto, Theeconto, Pfeffereonto u. s. w. — erleichtert ungemein die Uebersichtlichkeit, (621)
und diesen Vortheil beabsichtigte Stevin auch in der Staatsbuchführung hervortreten zu lassen, was ihm vollständig und weit rascher gelang, als die Durchsetzung seiner Wünsche nach decimalen Theilungen. Die unpersönlichen Conti, welche Stevin hier einführte, waren die der fürstlichen Küche, der Wohnung, des Marstalls, der Rechnungskammer, ferner solche über das Seewesen, Strafgelder u. s. w.

Wir gelangen zur letzten Gruppe mathematischen Wissens, deren Entwickelung in der zweiten Hälfte des XVI. Jahrhunderts wir zu suchen haben, zur ***Algebra***.

Einige Schriften, welche ihrem Inhalte wie ihrer Entstehungszeit nach fast besser hierher gehören würden, sind vorgreifend im XIII. Abschnitte geschildert worden. Um den Einblick in den Zusammenhang der Erfindungen nicht einzubüssen, rufen wir die Ueberschriften jener Werke, welche uns statt der Inhaltsangabe dienen müssen, und deren Druckjahre ins Gedächtniss zurück. Wir nennen Cardano's Practica arithmeticae generalis von 1539, Stifel's Arithmetica integra von 1544, Cardano's Ars magna von 1545, die von Stifel besorgte II. Auflage der Rudolf'schen Coss von 1553, Recorde's Whetstone of witte von 1556, Cardano's Regula Aliza von 1579, desselben Sermo de plus et minus zwischen 1572 und 1576. Für die letztgenannte ganz kurze Abhandlung war die Zeitbestimmung dadurch gegeben, dass Cardano 1576 starb, während die Abhandlung ein 1572 erstmalig gedrucktes Werk voraussetzt: Bombelli's Algebra. Von diesem Buche und seinem Verfasser haben wir jetzt zu reden.

Was wir freilich von Rafaele Bombelli[49] aus Bologna wissen, ist kaum mehr, als in diesen Worten bereits gesagt ist. Sein Vorname, seine Heimath sind bekannt. Der Titel seines berühmten Werkes heisst *l'Algebra*. Er schrieb dasselbe auf Aufforderung des ihm geneigten Bischofs von Malfi, und es ist zuerst 1572 in Venedig, dann abermals 1579 in Bologna gedruckt. Damit sind die Notizen seine Persönlichkeit im Wesentlichen erschöpft.

Der Inhalt der Algebra gliedert sich in drei Bücher. Das ***1. Buch*** besteht aus einer Lehre von den Wurzelgrössen, so weit solche bei der Auflösung von Gleichungen Anwendung findet; insbesondere ist Gewicht auf die Ausziehung der Kubikwurzel aus einem Binomium gelegt, von dessen beiden Theilen der eine eine Quadratwurzel ist. Das ***2. Buch*** ist die eigentliche Algebra, die Lehre von den Gleichungen der vier ersten Grade mit einer Unbekannten. Das ***3. Buch*** ist eine Sammlung von ungefähr 300 Aufgaben, welche zur Einübung des in den beiden ersten Büchern Gelehrten dienen. (622)

[49] ***Libri*** III, 181–184.

Eine wichtige Stelle des ersten Buches ist lange Zeit so gut wie unbeachtet geblieben. In ihr ist die ***Ausziehung der Quadratwurzel mittels der Kettenbrüche*** gelehrt[50], also die Formel

$$\sqrt{a^2+b} = a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \ddots}}$$

Freilich hat sich Bombelli mit dem Zahlenbeispiele $\sqrt{13}$ begnügt. Er findet $a = 3$, $b = 4$ und als ersten Näherungswerth $3+\frac{4}{6} = 3\frac{2}{3}$. dann lässt er $\frac{4}{6}$ zu dem im Nenner befindlichen 6 hinzufügen, so entsteht als weiterer Näherungswerth $3+\frac{4}{6+\frac{4}{6}} = 3\frac{3}{5}$. Dass Bombelli über die Sache klarer dachte als er sie auszudrücken wusste, geht aus seiner weiteren Behandlung hervor, welche wir in unserem Berichte nur so weit abändern, dass wir die Unbekannte und deren Quadrat durch x und x^2 ersetzen. Ist $\sqrt{13} = 3 + x$, so folgt $13 = 9 + 6x + x^2$, $4 = 6x + x^2$. Gewöhnlich vernachlässigt man x^2 und schreibt nur $4 = 6x$, woraus $x = \frac{2}{3}$ folgt. Will jetzt das vernachlässigte x^2 auch in Rechnung gezogen werden, so muss $x^2 = \frac{2}{3}x$ oben eingesetzt werden. Man erhält also $4 = 6x + \frac{2}{3}x = \frac{20}{3}x$ und $x = \frac{3}{5}$. Dieser neue Werth nöthigt zu $x^2 = \frac{3}{5}x$ d.h. zu $4 = 6x + \frac{3}{5}x = \frac{33}{5}x$ nebst $x = \frac{20}{33}$ u. s. w.

Da die Gleichungen dritten und vierten Grades den Schwerpunkt des Werkes bilden, so ist natürlich, dass Bombelli auch in der damals noch in ganz frischem Angedenken stehenden, kaum erst durchgefochtenen Streitsache zwischen Tartaglia auf der einen, Cardano und Ferrari auf der anderen Seite Partei ergreifen musste. Er that es zu Gunsten der beiden Letztgenannten, sei es dass die Gerechtigkeit ihrer Sache ihn überzeugte, sei es dass für ihn auch ins Gewicht fiel, dass Ferrari von Bologna seine eigene Heimath theilte. Tartaglia, so drückt Bombelli sich aus[51], sei von Natur so gewöhnt gewesen, Böses zu sagen, dass er dachte, ein ehrenvolles Zeugniss für sich abgelegt zu haben, wenn er von einem Anderen (623)
Uebles geredet hatte. Auffallen muss dabei, dass Bombelli in dem ganzen Buche nicht ein einziges Mal des Scipione Del Ferro gedenkt, der doch auch Bologneser war, und dem nach übereinstimmender Aussage der Gegner die erste Auflösung der kubischen Gleichung geglückt war.

Die rasche Aufeinanderfolge der beiden Ausgaben, in welchen 1572 und 1579 die Algebra erschien, ist Zeugniss dafür, dass sie Käufer fand, eine für diese Käufer selbst schmeichelhafte Thatsache, da Bombelli's Schreibart durch ungewohnte Namen und Bezeichnungen zuerst fast abschreckend wirken musste. Die Unbekannte nannte Bombelli *tanto* oder *quantita*, ihr Quadrat *potenza*, und das dürfte das erste Vorkommen dieses Wortes sein, welches später die allgemeine Bedeutung erhielt, welche ihm heute noch anhaftet, während Bombelli für den weiteren

[50] Wertheim, Die Berechnung der irrationalen Quadratwurzeln und die Erfindung der Kettenbrüche. Zeitschr. Math. Phys. XLII, Supplementheft S. 149–160 mit Berufung auf Bombelli, Algebra S. 35.

[51] *Di sua natura era cosi assuefatto a dir male, che all' hora egli pensava di haver dato onorato saggio di se, quando che di alcuno havesse sparlato* (S. 5 des Vorwortes *Agli Lettori*).

Begriff mit Tartaglia des Wortes *dignita* sich bedient. Die Quadratwurzel aus einer negativen Zahl heisst *piu di meno* oder *meno di meno*, je nachdem sie selbst positiv oder negativ genommen werden soll. Auch in den Bezeichnungen schlug Bombelli andere als die gewohnten Bahnen ein. Es war gewiss ein glücklicher Gedanke von ihm, die aufeinanderfolgenden Potenzen der Unbekannten durch Zahlen anzudeuten, unter welchen ein kleiner Bogen sich befand, also $\overset{1}{\smile}, \overset{2}{\smile}, \overset{3}{\smile}, \overset{4}{\smile}$ zu schreiben, eine Bezeichnung, welche wenig später von Pietro Antonio Cataldi in seinem *Trattato del modo brevissimo di trovare la radice quadra delli numeri* von 1613, von welchem im 75. Kapitel zu reden sein wird, aber schon in seinem *Trattato dell' Algebra proportionale* von 1610 dahin verändert wurde, dass die kleinen Bögen unter den Zahlzeichen wegfielen und letztere durchstrichen wurden. Bei Cataldi war also $\not 3$ die dritte, $\not 7$ die siebente und sogar $\not 1$ die erste Potenz der Unbekannten[52]. Glücklich war auch Bombelli's Gedanke, die Wurzeln aus zusammengesetzten Ausdrücken durch eine besondere Bezeichnung deutlich, hervortreten zu lassen. Paciuolo (S. 320) besass bereits das Wort *Radix universalis* mit der Bezeichnung ℞V, um Wurzeln aus vereinigten Grössen zu ziehen, z.B. ℞V7p̃℞14 $= \sqrt{7+\sqrt{14}}$. Cardano in seiner *Practica Arithmeticae generalis* von 1539 unterschied von der *Radix universalis* die *Radix ligata*[53], bei welcher das erste Wurzelzeichen nur der unmittelbar folgenden Zahl gilt, also zwei Quadratwurzeln addirt werden. Als eigentlich ganz überflüssiges Zeichen schrieb (624)
Cardano ein L vor die erste Wurzel, z. B. L ℞7p℞14 $= \sqrt{7} + \sqrt{14}$. Bombelli war der Meinung, man solle für Radix universalis beide Namen, Radix universalis oder Radix legata unterschiedlos gebrauchen[54]; er selbst bediente sich später fast ausschliesslich des Ausdruckes Radix legata. Dabei schrieb er ein L hinter das erste ℞, und eine Umkehrung desselben in der Form ⅃ schloss am Ende den ganzen der Wurzelausziehung unterworfenen Ausdruck ab, z. B.

$$\text{℞}L7p\text{℞}14\text{⅃} = \sqrt{7+\sqrt{14}}.$$

Solche Vereinigungen unter ein gemeinsames Wurzelzeichen wandte er auch bei Wurzeln höheren Grades und auch in Wiederholung an.

$$\text{℞}qL\text{℞}cL\text{℞}q68p2\text{⅃}m\text{℞}cL\text{℞}q68m2\text{⅃⅃} = \sqrt{[\sqrt[3]{(\sqrt{68}+2)} - \sqrt[3]{(\sqrt{68}-2)}]},^{55}$$

$$\text{℞}cL4p\text{dim}\text{℞}q11\text{⅃}p\text{℞}cL4m\text{dim}\text{℞}q11\text{⅃} = \sqrt[3]{(4+\sqrt{-11})} + \sqrt[3]{(4-\sqrt{-11})}.^{56}$$

Wir benutzen dieses letztere Beispiel, um zu zeigen, wie Bombelli an demselben die Wurzelausziehung vollzieht. Sei zunächst allgemein angenommen, man habe

[52] G. Wertheim in der Zeitschr. Math. Phys. XLIV, Histor.-liter. Abthlg. S. 48.
[53] Cardano IV, 14.
[54] Bombelli, Algebra S. 99.
[55] Ebenda pag. 356.
[56] Ebenda pag. 294–295.

es mit $\sqrt[3]{a+\sqrt{-b}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{-b}}$ zu thun, und es sei $\sqrt[3]{a+\sqrt{-b}}=p+\sqrt{-q}$. Die Erhebung zum Kubus und Gleichsetzung der reellen wie der imaginären Theile zeigt, dass $a-p^3-3pq$, $\sqrt{-b}=(3p^2-q)\sqrt{-q}$ und dadurch ergiebt sich die zweite Kubikwurzel als $\sqrt[3]{a-\sqrt{-b}}=p-\sqrt{-q}$, die Summe beider also als

$$\sqrt[3]{a+\sqrt{-b}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{b}}=p+\sqrt{-q}+p-\sqrt{-q}=2p.$$

Es kommt also ausschliesslich auf die Auffindung von $2p$ an. Multiplicirt man die beiden Kubikwurzeln miteinander, so entsteht $\sqrt[3]{a^2+b}=p^2+q$ und, wenn $\sqrt[3]{a^2+b}=c$ rational ist, $p^2+q=c,\ q=c-p^2,\ -3pq=3p^3-3cp,\ p^3-3pq=4p^3-3cp$. Wir hatten aber als ein erstes Ergebniss $a=p^3-3pq$, mithin ist p eine Wurzel der kubischen Gleichung $4p^3-3cp=a$.

In dem gegebenen Zahlenbeispiele ist

$$\begin{aligned} &a=4, \quad b=11, \quad c=\sqrt[3]{4^2+11}=3 \\ \text{und}\quad &4p^3-9p=4, \quad 8p^3-18p=8, \quad (2p)^3-9(2p)=8 \end{aligned}$$

aufzulösen. Kann man, was in diesem Beispiele nicht zutrifft, hieraus mit Leich- (625)
tigkeit $2p$ ermitteln, so ist die Aufgabe gelöst.

Dagegen bilde ein anderes Mal[57] $z^3=15z+4$ den Ausgangspunkt der ganzen Untersuchung. Die Formel des Del Ferro lehrt $z=\sqrt[3]{(2+\sqrt{-121})}+\sqrt[3]{(2-\sqrt{-121})}$. Hier ist $a=2$, $b=121$, $c=\sqrt[3]{2^2+121}=5$, $4p^3-15p=2$, $(2p)^3-15(2p)=4$, welches bei $2p=4$ erfüllt wird. Das hier vorhandene Rationalsein von c tritt immer ein, so oft eine kubische Gleichung den Ausgangspunkt bildete. Aus $x^3=mx+n$ folgt nämlich

$$x=\sqrt[3]{\left(\frac{n}{2}+\sqrt{(\frac{n}{2})^2-(\frac{m}{3})^3}\right)}+\sqrt[3]{\left(\frac{n}{2}-\sqrt{(\frac{n}{2})^2-(\frac{m}{3})^3}\right)}$$

mit $a=\frac{n}{2}$, $b=(\frac{m}{3})^3-(\frac{n}{2})^2$, also $a^2+b=(\frac{m}{3})^3$ und $c=\sqrt[3]{a^2+b}=\frac{m}{3}$.

Die Bedeutung der Bombelli'schen Untersuchung liegt offenbar nicht etwa darin, dass sie die kubische Gleichung leichter auflösen lehrte. Wir haben ja gerade an dem zuletzt von uns besprochenen Beispiele gesehen, dass die Umwege nur dahin führten, dass man schliesslich zu derselben Gleichung zurückkehrte, von welcher man ausgegangen war, und deren Wurzel 4 somit unmittelbar hätte gefunden werden können. Aber durch die geführte Untersuchung wurde einleuchtend gemacht, dass jene beiden Kubikwurzeln der Del Ferro'schen Formel der Auswerthung fähig waren, und dass in Folge derselben die imaginären Theile sich weghoben. „Ein ausschweifender Gedanke“, sagt Bombelli[58] „nach der Meinung

[57] Bombelli, Algebra pag. 293.
[58] Ebenda die drei letzten Zeilen von pag. 293.

Vieler. Ich selbst war eine Zeit lang der gleichen Ansicht. Die Sache schien mir auf Sophismen mehr als auf Wahrheit zu beruhen, aber ich suchte so lange, bis ich den Beweis fand.“

Die Gleichung vierten Grades behandelt Bombelli[59] nach Ferrari, und da wir dessen Methode schon früher (S. 509–510) aus Cardano’s Ars magna erörtert haben, so dürfen wir uns hier an der Bemerkung genügen lassen, dass alle Einzelfälle in grosser Ausführlichkeit durchgesprochen werden.

Der Auflösung von Gleichungen durch allgemeine Formeln steht die durch Rechnung mit bestimmten Zahlen gegenüber. Auch mit solchen Methode hat, wie wir wissen, Cardano es versucht. Ein eigenthümliches Verfahren ersann Jo- (626)
hannes Junge[60] aus Schweidnitz, Rechenmeister zu Lübeck. Er soll es 1577 veröffentlicht haben, aber in welcher Weise ist unbekannt. Die Gleichung wird in zwei Glieder getheilt, so dass die höchste Potenz der Unbekannten für sich allein das eine Glied bildet. Alsdann muss die Gesammtheit aller anderen wieder zu einem Gliede vereinigten Bestandtheile wiederholt durch einen angenommenen Werth der Unbekannten sich theilbar erweisen, wenn die Annahme richtig war. Ein Beispiel welches Raimarus Ursus (S. 593) in einem nachgelassenen, 1601 gedruckten Werke *Arithmetica analytica vulgo Cosa* aufbewahrt hat, lautet in der verlangten Form: $x^3 = 486 - 90x - 21x^2$. Ist nun $x = 3$ richtig gewählt, so kann $486 = 3 \cdot 162$ mit $-90x$ zu $3(162 - 90) = 3 \cdot 72$ vereinigt werden; $3 \cdot 72$ aber $= 3^2 \cdot 24$ vereinigt sich sodann mit $-21x^2$ zu $3^2(24 - 21) = 3^3$; welches mit x^3 übereinstimmt. Freilich gilt von diesem Verfahren in vollem Maasse was Raimarus darüber sagt, dass es „etwan Conjectural vnd durch etzliche biszweilen auch wol durch viele mutmassungen vnd gleichsam vorattungsweiss verrichtet wird“.

Simon Stevin’s im Jahre 1585 gedruckter Band begann mit einer Schrift, die den Titel führte: *L’arithmétique contenant les computations des nombres artihmetiques ou vulgaires: aussi l’Algebre avec les eguations des cinq quantitez.* Die letzten Worte geben die Grenze an, bis zu welcher das Buch sich erstreckt, bis zu Gleichungen vierten Grades, da diese aus fünf Einzelgliedern bestehen können. Darüber hinaus oder, wie Stevin sagt[61], über Lois de Ferrare, d. h. Ludovico Ferrari, sich zu erheben, sei ihm nicht gelungen. Er kannte dessen Leistungen offenbar aus Bombelli, welchen er anführt. An Bombelli schliesst Stevin sich im Gebrauche des Wortes *potence* wie in dem von *dignites* an. In ersterer Beziehung geht aber Stevin weiter, da ausser *potence* für das Quadrat der Unbekannten auch *potence cubique*[62] für deren dritte Potenz bei ihm vorkommt. Die Bezeichnung der Potenzen stammt bei Stevin ausgesprochenermassen[63] aus der gleichen Quelle. Er benutzt dazu die eingeringelten Zahlen ①, ②, ③ u. s. w. Der ⓪ ha-

[59] Ebenda pag. 353 sqq.

[60] Gerhardt, Math. Deutschl. S. 84–87. — Treutlein, Deutsche Coss, Zeitschr. Math. Phys. XXIV, Supplem. S. 99–102. — Allgem. Deutsche Biographie XIV, 705

[61] Stevin I, 6.

[62] Ebenda I, 58.

[63] Ebenda I, 8.

be Bombelli sich nicht bedient, sie entspreche der Zahl. Auch der Begriff ***eines eingeringelten Bruches*** fehlt nicht, wenngleich Stevin ihn nicht anwendet. Er sagt ausdrücklich[64], ein eingeringeltes $\frac{2}{3}$ würde das Symbol für die Kubikwurzel aus dem Quadrate der Unbekannten sein. Kommen mehrere Unbekannte in einer (627)
Aufgabe vor, so nennt Stevin[65] die zweite, dritte derselben *Quantite posposee seconde, tierce* und schreibt 1 sec ①, 1 ter ① u. s. w. Auch für Producte solcher Unbekannten sieht Stevin eine Bezeichnung mittels des Multiplicationsbuchstabens M vor, z. B.

$$3xyz^2 = 3①M\mathrm{sec}①M\mathrm{ter}②.$$

Dividiren soll man durch den Divisionsbuchstaben D, z. B.

$$\frac{5x^2z^2}{y} = 5②D\mathrm{sec}①M\mathrm{ter}②.$$

Wir kommen hier auf die Anwendung solcher eingeringelter Zahlen zurück, welche die Rangordnung der Decimalbrüche in Stevin's *Disme* andeuten. Es kann bei dem gleichzeitigen Erscheinen der Disme mit der Algebra kaum einem Zweifel unterworfen sein, dass Stevin, wenn er es auch nirgend ausdrücklich sagt, jene Stellenzeiger als die aufeinander folgenden Potenzen von $\frac{1}{10}$ sich dachte.

Hatte Bombelli ein Zeichen der Zusammengehörigkeit $L\!\rfloor$ eingeführt, so führte Stevin eine aus zwei mit den gekrümmten Seiten aneinanderstossenden Klammern gebildetes Trennungszeichen[66] ein. Für die Quadratwurzel schrieb er mit Stifel $\surd$, und nun bedeutet $\sqrt{9})(②$, dass das Wurzelzeichen zwar auf 9, aber nicht auf ② sich beziehen solle, dass also $3x^2$ gemeint sei. Neben diesen für die Weiterbildung algebraischer Form nicht ganz unwichtigen Dingen, zu welchen noch der Name *Multinomie algebrique*[67] zu zählen wäre, finden wir bei Stevin auch sachlich Bemerkenswerthes.

Da erwähnt er[68], die Summe zweier Quadratwurzeln könne der zweier anderen Quadratwurzeln nicht gleich sein, wenn die beiden ersten Radicanden theilerfremd seien, d. h. $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{c} + \sqrt{d}$ erfordere $a = m^2 f$ und $b = n^2 f$.

Da sagt er[69], ***man könne den grössten Gemeintheiler zweier algebraischer Multinomien finden.*** Nonius freilich habe es nicht fertig gebracht (S. 389), aber man brauche nur das Verfahren einzuschlagen, welches bei ganzen Zahlen zum Ziele führe. Soll z. B. der grösste Gemeintheiler von $x^3 + x^2$ und $x^2 + 7x + 6$ gesucht werden, so muss man ersteren Ausdruck durch letzteren dividieren. Der Quotient ist x und $-6x^2 - 6x$ bleibt als Rest. Mit diesem Reste dividiert man in $x^2 + 7x + 6$. Der Quotient ist $-\frac{1}{6}$ und $6x + 6$ bleibt als Rest.

[64]Ebenda I, 64.
[65]STEVIN I, 7.
[66]Ebenda I, 10.
[67]Ebenda I, 7.
[68]Ebenda I, 51.
[69]Ebenda I, 56.

Letzterer ist in $-6x^2 - 6x$ ohne Rest enthalten, giebt also den gesuchten Gemeintheiler. Die Frage ist, wenn auch leicht zu beantworten, keine müssige, wodurch Stevin, wodurch vor ihm Nonius sich veranlasst fühlte, überhaupt diese Aufgabe (628)
sich zu stellen? Es handelte sich dabei offenbar um die Auflösung von Gleichungen höherer Grade. Die ersten Versuche zu deren Bewältigung liefen bis zu Cardano's Buch von 1539 und Stifel's Arithmetica integra einschliesslich darauf hinaus, durch glückliches Errathen gewisser hinzuzuaddirender Ergänzungen solche Formen einander gleichwerthiger Ausdrücke hervorzubringen welche ein Weglassen von gemeinschaftlichen Factoren gestatteten. War man nun im Stande, einen, solchen gemeinschaftlichen Factor leicht aufzufinden, so mochte man wähnen, damit um einen wesentlichen Schritt in der Lehre von den höheren Gleichungen weiter gekommen zu sein.

Die Auflösung quadratischer Gleichungen beruht schliesslich auf einer auf beiden Seiten der Gleichung vorzunehmenden Ergänzung, und Stevin hat sie von diesem Gesichtspunkte aus gelehrt[70], wenn er auch hinzusetzte, insgemein begnüge man sich damit, die schon abgeleitete Regel anzuwenden.

Bei den kubischen Gleichungen machte Stevin auf die Schwierigkeit aufmerksam, welche das Auftreten negativer Zahlen unter dem Quadratwurzelzeichen verursache[71]. Cardano habe in seiner Regula Aliza, Andere anderwärts gesucht, der Schwierigkeit Herr zu werden. Er finde es unnöthig darauf einzugehen, weil eine allgemeine Regel noch nicht gefunden sei — in unserem Berichte über die Algebra Bombelli's haben wir das Zutreffende dieser Behauptung erkannt — Zufallerfolge verdienten aber nicht, dass man sich lange mit ihnen aufhalte.

Bei manchen Aufgaben, heisst es anderwärts[72], gebe es auch Auflösungen durch Minus *(solutions par –)*, $x^2 = 4x + 21$ werden z. B. durch $x = -3$ erfüllt.

Endlich heben wir eine **näherungsweise Gleichungsauflösung** hervor[73], deren Stevin sich als seiner Erfindung rühmt, und welche jedenfalls den theoretischen Vorzug besitzt, den gesuchten Wurzelwerth allmälig in seinen einzelnen Stellen von der höchsten zur niedersten absteigend entdecken zu lassen. Sei etwa

$$x^3 = 300x + 33915024$$

aufzulösen. Setzt man nach einander $x = l$, $x = 10$, $x = 100$, so wird jedesmal x^3 kleiner und erst bei $x = 1000$ grösser ausfallen als der Werth von $300x+33915024$. Folglich weiss man schon, dass x zwischen 100 und 1000 liegt, mithin dreiziffrig ist. Man sucht die Ziffer der Hunderter, welche einen der Werthe l, 2, ... 9 haben muss. Die 1 hat sich schon als zu klein gezeigt, man macht also den Versuch mit (629)
2, 3, 4 und erkennt, dass 2, 3 zu wenig, 4 zu viel giebt, also liegt die Unbekannte zwischen 300 und 400. Die Zehner von 1 an durchprobierend ermittelt man

[70] Stevin I, 69.
[71] Ebenda I, 71–72.
[72] Ebenda I, 77.
[73] Ebenda I, 88.

310, 320 als zu klein, 330 zu gross, sodass man berechtigt ist, 32 als richtigen Anfang anzunehmen und die Einer von 1 an in Angriff zu nehmen. 321, 322, 323 geben zu wenig, 324 stimmt ganz genau und ist daher der Werth der Unbekannten. Stevin macht zwei wichtige Zusatzbemerkungen. Erstens sei es möglich, dass die Unbekannte einen ganzzahligen Werth überhaupt nicht besitze, dann solle man die folgenden Decimalstellen sich verschaffen, was genau nach dem gleichen Verfahren geschehe, welches man zur Ermittelung der höheren Stellen einschlug, und das gleiche Verfahren führe auch zum Ziele, wenn die Unbekannte kleiner als 1 sei. Zweitens komme es vor, dass man sich begnügen müsse, dem Werthe der Unbekannten unendlich nahe zu kommen, ohne ihn zu erreichen[74], und das sei in zwei Fällen möglich, entweder bei Brüchen wie $\frac{5}{6}$, die in einen genau gleichen Decimalbruch sich nicht verwandeln lassen, oder bei Wurzelgrössen, welche irrational sind.

Stevin's Bearbeitung des Diophant haben wir hier nur so weit zu erwähnen, als wir bemerken, dass die gleichen Zeichen dort angewandt sind, welche der Algebra dienen, dass ein Gleichheitszeichen da wie dort fehlt, wiewohl Stevin bei Xylander, dessen lateinische Uebersetzung er nur weiter ins Französische übertrug[75], ein solches hatte kennen lernen müssen.

Der grösste Algebraiker der Zeit war Vieta. Seine erste algebraische Schrift *In artem analyticam isagoge*[76], Einleitung in die analytische Kunst, erschien 1591. Sie wollte nur einen Theil eines grösseren Werkes unter dem Namen der wiederhergestellten mathematischen Analysis oder der neuen Algebra bilden. Die Titel sämmtlicher Theile sind der Widmung vorausgeschickt, welche in schwülstigem Tone an die aus dem Geschlechte Melusinens stammende Fürstin Katharina von Rohan gerichtet ist. Wir bemerken dabei, dass überhaupt die Sitte der Zeit in Frankreich und Deutschland einer einfachen, klaren Sprache abhold war. Je mehr dem Griechischen entlehnte Neubildungen, je mehr Floskeln, je farbenreichere mythologische Bilder vorkamen, für um so vollendeter galt eine Abhandlung. (630)
Man muss dies wissen, um Stevin's unübertreffliche Klarheit würdigen, um Vieta's und Anderer Unverständlichkeit verzeihen zu können. Ob jene 1591 dem Titel nach vorhandenen Schriften auch thatsächlich alle bereits druckreif waren, wissen wir nicht, wahrscheinlich ist es wohl. Dann stammen aus jener frühen Zeit die 1593 gedruckten *Effectionum geometricarum canonica recensio* (S. 584) und das *Supplementum geometriae*, ebenso die gar erst 1615 mit Beweisen versehenen *Theoremata ad angulares sectiones* (S. 608), welche selbst nur ein Auszug aus einer dreitheiligen Schrift waren[77], von der das Meiste verloren ging. Verloren

[74] *Il peut avenir qu'on pourra approcher infiniment au requis sans toutesfois par ceste maniere pouvoir parvenir a la parfaicte solution.*

[75] Stevin I, 102.

[76] Vieta pag. l–12. — F. Ritter hat eine mit Anmerkungen bereicherte Uebersetzung im *Bullet. Boncompagni* I, 225–244 erscheinen lassen, welcher der Originaldruck von 1591 zu Grunde liegt.

[77] *Analyse des sections angulaires distribuée en trois parties* nach Ritter's Uebersetzung.

sind auch die 1591 genannten 7 ersten Bücher der Antworten auf verschiedene Fragen[78], zu welchen offenbar als Fortsetzung das 1593 gedruckte 8. Buch (S. 586) gehörte, jedenfalls ein ungemein zu beklagender Verlust, wenn die ersten Bücher dem letzten nur halbwegs ebenbürtig waren. Die Isagoge ist, wie ihr Name es aussprechen soll, wirklich nur eine Einleitung. Nachdem die ***Analysis*** oder ***Zetetik*** als diejenige Kunst des Auffindens geschildert worden, welche von dem als bekannt angenommenen Gesuchten ausgeht, nachdem eine Reihe von beweislos einleuchtenden Sätzen (Gleiches und Gleiches durch Addition, Subtraction, Multiplication, Division verbunden giebt Gleiches. Vier Grössen, von denen zwei zu einem Producte vereinigt das gleiche Product wie die beiden anderen geben, stehen in Proportion u. s. w.) zusammengestellt ist, spricht Vieta im III. Kapitel das erste und allbezügliche ***Gesetz der Homogeneität*** aus[79]. Den Griechen war dieses Gesetz ursprünglich ein selbstverständliches. Nur Längen können Längen, nur Flächen Flächen, nur Körper Körpern, nur Verhältnisse Verhältnissen verglichen werden. Später wich man von diesem Gesetze, das eine unbeabsichtigte aber zuverlässige Beglaubigung ausgesprochener Sätze mit sich führte, ab. Heron vereinigte Längen und Flächen zu einer Summe (Bd. I, S. 376), Diophant gestattete sich das Gleiche (Bd. I, S. 454). Mag sein, dass Vieta gerade beim Studium des Diophant, den er in der Isagoge selbst anführt[80], auf das Unstatthafte aufmerksam wurde. Jedenfalls hat er zuerst als Gesetz erkannt und ausgesprochen, (631)
was meistens nur in dunklem Gefühle der Richtigkeit geübt worden war, und dieses Verdienst ist grösser als Mancher denken mag. Nachdem das Gesetz der Homogeneität einmal aufgestellt war, hat Vieta im IV. Kapitel seine Folgerungen daraus gezogen. Dieses Kapitel ist den Vorschriften der ***Logistica speciosa***, *De praeceptis Logistices speciosae*, gewidmet, und damit war ein Kunstausdruck geschaffen, der fast allein von den zahllosen Neuerungen Vieta's ihn überlebte. Logistik war von Alters her Rechenkunst. Vieta unterschied zwei Gattungen derselben. Sie war *numerosa*, wenn mit Zahlen, *speciosa*, wenn mit versinnlichenden Zeichen von Raumgebilden[81], z. B. mit Buchstaben gerechnet wurde. Die Buchstaben, lauter Initialen des lateinischen Alphabets, stellen demnach Gebilde vor, welche dem Homogeneitätsgesetze unterworfen sind. Es sind Grössen, nicht Zahlen. Auch Tartaglia hob den Unterschied zwischen Zahlen und Quantitäten hervor (S. 519). Für jene bediente er sich der Wörter *multiplicare* und *partire*, für diese gebrauchte er *ducere* und *misurare*. Aehnlich unterscheidet Vieta. Die Grundsätze von Kapitel II enthalten die Ausdrücke *multiplicare* und *dividere*, im

[78] *Sept livres de différentes réponses sur des sujets mathématiques.*

[79] *Prima et perpetua lex . . . quae dicitur lex homogeneorum.* Ueber dieses Gesetz vergl. Marie, *Histoire des sciences mathématiques et physiques* III, 9–19, wo allerdings viel mehr hinein- als herausgelesen wird.

[80] Vieta pag. 5: *Haec est λειψις Diophanto, ut adfectio adiunctionis υπαρξις.* Die hier vorkommenden griechischen Ausdrücke beweisen, dass Vieta den Diophant aus einem griechischen Texte kannte.

[81] *species seu rerum formas.*

Kapitel IV heisst es *ducere* und *adplicare* vielleicht mit Anlehnung an Tartaglia, wahrscheinlicher der Euklidausgabe des Campanus II, 2 beziehungsweise I, 44 entnommen. Das Homogeneitätsprincip hat freilich, und auch dafür liefert Kapitel IV die Belege, den rein geometrischen Untergrund längst aufgegeben. Nicht auf Mannigfaltigkeiten von 1, 2 oder 3 Abmessungen beschränkt sich die Algebra. Fast beliebig hoher Dimension können die in einer Gleichung auftretenden Glieder sein, wenn nur alle gleich hoher. Die von Vieta gelieferten Beispiele erstrecken sich zum *solido-solido-solidum*, d. h. bis zur 9. Potenz der behandelten Grösse, da die einzelnen Bestandteile **addirt** werden, wie es von Diophant geübt wurde, und nicht ***multiplicirt***, wie es bei den ***Italienern*** und deren Nachahmern, z. B. Stifel geschah. Die Vervielfachung wird durch das Wort *in*, die Theilung durch den Bruchstrich angedeutet. Das Produkt von $\frac{A \text{ planum}}{B}$ in $\frac{Z \text{ quadratum}}{G}$ ist $\frac{A \text{ planum}}{B \text{ in } G}$ in Z quadratum u. s. w. Als Zeichen der Addition und Substrction sind + und - benutzt, ausserdem giebt es noch = als Zeichen der Differenz zweier Grössen[82], ohne dass man anzugeben braucht, welche von beiden die grössere sei. Im V. Kapitel kommt Vieta auf die eigentlichen Gleichungen zu reden. Die gesuchten Grössen, *magnitudines quaesititiae*, werden durch die Vocale $A, E, I, O,$ (632)
V, Y dargestellt, die gegebenen, *datae*, durch Consonanten B, G, D u. s. w.[83]. Vielleicht suchte Vieta durch diese Anwendung der Vocale sich mit der Uebung von Ramus, dem damals in Frankreich hochgeschätzten Schriftsteller, in Einklang zu setzen der die gleichen Buchstaben (S. 564) bei der Figurenbezeichnung bevorzugte. Von den Gesetzen, welche Vieta ausspricht, sei nur eines erwähnt[84]: *Antithesi aequalitatem non immutari.* Antithesis heisst nichts Anderes als das Hinüberschaffen eines Gliedes mit entgegengesetztem Vorzeichen auf die andere Seite, welches also als ein die Richtigkeit der Gleichung nicht Beeinträchtigendes gestattet wird. Das VI., VII., VIII. Kapitel geben zu besonderen Bemerkungen wenig Anlass. Höchstens dass aus dem letztgenannten anzuführen wäre dass die Gleichung dazu führe, das Geheimniss der Winkeltheilung zu enthüllen, ohne desshalb Gerades mit Krummem zu vergleichen, wogegen das Homogeneitätsgesetz sich zu sträuben scheine[85].

Unter die 1591 gleichfalls angeführten Schriften gehören *Ad Logisticen speciosam notae priores* und *posteriores.* Es ist nicht wahrscheinlich, dass eine Veröffentlichung zu Lebzeiten Vieta's stattfand und der zweite Theil ist dann überhaupt nie bekannt geworden[86], nur der erste ist in der Gesammtausgabe von 1646 vorhanden[87]. Man kann diese Anmerkungen zur Logistica speciosa füglich in zwei Abtheilungen trennen. Die erste Abtheilung lehrt Multiplicationen von Summen in Differenzen und Potenzerhebungen von Binomien, dann vom 25. Satze an auch

[82] Vieta pag. 5.
[83] Vieta pag. 8 No. 5.
[84] Ebenda pag. 9 Propositio I.
[85] Ebenda pag. 12 No. 27 und 28
[86] Ritter im *Bullet. Boncompagni* I, 245.
[87] Vieta pag. 13–41. Die französische Uebersetzung von Ritter l.c. pag. 246–276.

Berechnung von Ausdrücken von der Gestalt $(A+B)^m + D^n(A+B)^{m-n}$. Die letztgenannten geben zur Einführung eines Wortes Gelegenheit. Im einfachsten Falle

$$(A+B)^2 + D(A+B)$$

handelt es sich geometrisch gesprochen (Figur 126) um das Quadrat einer zweitheiligen Grösse, welche durch Anfügung eines Rechteckes vergrössert ist, dessen eine Seite in Gestalt jener zweitheiligen Quadratseite gegeben ist, während die andere gleichfalls gegebene Seite mit an der Bildung der Figur betheiligt ist. Vieta nennt[88] sie offenbar aus dem hier erörterten, wenn auch bei ihm nicht ausgesprochenen Grunde *longitudo coefficiens*, und damit war das Wort **Coefficient** in

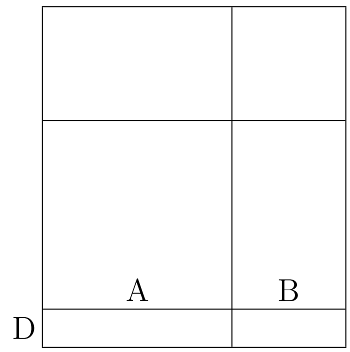

Fig. 126.

die Wissenschaft eingeführt. Die zweite Abtheilung beginnt mit dem 45. Satze (633)
und handelt von der ***Entstehung rationaler rechtwinkliger Dreiecke aus einander***. Damit aus zwei Zahlen A, B, welche die Wurzeln des rechtwinkligen Dreiecks heissen[89], ein solches gebildet werde, benutzt man sie als Anfangsglieder einer geometrischen Reihe, deren drittes Glied folglich $\frac{B^2}{A}$ heisst. Summe und Differenz der beiden äusseren Glieder und das doppelte mittlere Glied (in Vieta's Schreibweise: $A + \frac{B \text{ quadrato}}{A}$, $A = \frac{B \text{ quadrato}}{A}$, $B2$, indem der Zahlenfactor 2 dem B nachgesetzt wird) sind alsdann die drei Seiten des rationalen Dreiecks. Vervielfache man Alles mit A, damit sämmtliche Seiten auf dieselbe Benennung gebracht seien, *ut ad idem genus adplicationis latera quaeque revocentur*, so heissen die Seiten: A quadr. + B quadr., A quadr. = B quadr., A in $B2$. Nun seien zwei rechtwinklige Dreiecke Z, B, D und X, F, G gegeben, d. h. es sei, um von jetzt an die heute gewöhnliche Schreibweise anzuwenden, $Z^2 = B^2 + D^2$, $X^2 = F^2 + G^2$. Dann ist auch $(ZX)^2 = (BG+DF)^2 + (BF-DG)^2 = (BF+DG)^2 + (BG-DF)^2$ mit zweifacher Zerlegung des Productes zweier Quadratsummen in eine neue Quadratsumme, wie sie seit Diophant (Bd. I, S. 451) bekannt war, oder es ist aus zwei Dreiecken in doppelter Art ein drittes gebildet. Statt zweier verschiedener Dreiecke kann man dasselbe Dreieck, etwa A, B, D, zweimal nehmen[90]. Das eine neue Dreieck heisst dann A^2, $2BD$, $B^2 - D^2$, und es hat die Eigenschaft, dass ***sein einer spitzer Winkel doppelt so gross ist, als ein spitzer Winkel des ursprünglichen Dreiecks***. Vieta beweist diese Winkeleigenschaft nicht, er spricht sie nur aus; bei seiner uns aus der Auflösung der Aufgabe Van Roomen's bekannten Gewandtheit, mit trigonometrischen Functionen zu rechnen, kann aber nicht gezweifelt werden, dass sein Gedankengang etwa folgender war. Hiess im ursprünglichen Dreiecke der eine spitze Winkel α, so war

[88] Vieta pag. 23 und öfter.
[89] Vieta pag. 33: *Triangulum rectangulum a duabus radicibus effingere.*
[90] Ebenda pag. 36: *A duobus triangulis rectangulis aequalibus et aequiangulis tertium triangulum rectangulum constituere.*

$\sin\alpha = \frac{D}{A}$, $\cos\alpha = \frac{B}{A}$, $2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \sin 2\alpha = \frac{2BD}{A^2}$ und also im neuen Dreiecke der Winkel 2α nachgewiesen, als dessen Cosinus $\frac{B^2-D^2}{A^2}$ erscheint. An diesem Gedankengange ist um so weniger zu zweifeln, als Vieta der eben erörterten Aufgabe als nächste die der Bildung **des Dreiecks mit dreifachem Winkel**[91] anschliesst. Durch Vervielfachung von $A^2 = B^2 + D^2$ mit $(A^2)^2 = (2BD)^2 + (B^2 - D^2)^2$ erhält er (634)

$$(A^3)^2 = (B^3 - 3BD^2)^2 + (3B^2D - D^3)^2$$

und

$$\sin 3\alpha = \sin\alpha\cdot\cos 2\alpha + \cos\alpha\cdot\sin 2\alpha$$
$$= \frac{D}{A}\cdot\frac{B^2-D^2}{A^2} + \frac{B}{A}\cdot\frac{2BD}{A^2} = \frac{3B^2D-D^3}{A^3},$$

was wirklich für den einen spitzen Winkel des neuen, dritten Dreiecks zutrifft. Sogar zum allgemeinsten Falle erhebt sich Vieta[92] und erkennt, dass die stets nach gleicher Vorschrift vorgenommene Bildung des n-ten Dreiecks aus dem $(n-1)$-ten und dem ersten einen spitzen Winkel $n\alpha$ entstehen lässt. Mit anderen Worten: **Vieta kannte die Formeln, welche sin $n\alpha$ und cos $n\alpha$ aus sin α und cos α zusammensetzen**, nur dass er D statt sin α und B statt cos α schrieb und die Hypotenuse des ersten Dreiecks A, die des n-ten Dreiecks A^n nannte. Die noch folgenden Sätze können, als von weitaus geringerer Wichtigkeit, übergangen werden.

Auch fünf Bücher **Zetetica**[93], von welchen ein Abdruck von 1593 bekannt ist, müssen 1591 vorhanden gewesen sein. Man schildert sie am Zutreffendsten als eine Sammlung von Aufgaben welche Diophant entlehnt oder nachgebildet sind. Als einzelnes Beispiel erwähnen wir die 2. Aufgabe des V. Buches[94], welche drei in arithmetischer Progression stehende Quadratzahlen verlangt. Als das erste Quadrat setzt Vieta A^2, als das zweite $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$, das dritte muss folglich $A^2 + 4AB + 2B^2$ heissen und möge $(D-A)^2$ sein. Diese letzte Gleichung giebt, wie ohne weitere Zwischenrechnung gesagt wird, $A = \frac{D^2-2B^2}{4B+2D}$. Dann heisst es sofort weiter: die Seite des ersten Quadrates ist folglich proportional, *similis*, $D^2 - 2B^2$, die des zweiten proportional $D^2 + 2B^2 + 2BD$, die des dritten proportional $D^2 + 2B^2 + 4BD$.

Immer wieder dem gleichen Jahre 1591 gehören nach dem öfters von uns benutzten Inhaltsverzeichnisse die Abhandlungen *De aequationem recognitione et emendatione*[95] an, welche erst 1615 aus Vieta's Nachlasse durch Anderson

[91] *Triangulum anguli tripli.*

[92] Vieta pag. 37: *Consectarium generale in diductionibus triangulorum rectangulorum.*

[93] Ebenda pag. 42–81.

[94] Ebenda pag. 76: *Invenire numero tria quadrata aequo distantia intervallo.*

[95] Ebenda pag. 84–126 die erste Abhandlung: *De recognitione* und pag. 127–158 die zweite: *De emendatione*. Ihre Zusammengehörigkeit tritt in den Benennungen als Tractatus primus und Tractatus secundus hervor.

dem Drucke übergeben worden sind. Die Bezeichnung wechselt in diesen Abhandlungen ebenso wie der Druck. Während der eigentliche Text die Buchstabenbezeichnung in der Art durchführt, wie wir sie als Vieta's Eigenthum kennen gelernt haben (also Vocale für Unbekannte, Consonanten für Bekanntes, den (635)
Buchstaben nachgesetzte Silben quad., cub. u. s. w. zur Bezeichnung der Potenzirung, diesen wieder nachgesetzt Zahlenfactoren) enthalten jedem Kapitelchen beigefügte Anmerkungen Zahlenbeispiele, welche ausser durch die Verschiedenheit der Typen auch dadurch sich unterscheiden, dass in ihnen die Unbekannte und ihre Potenzen durch N (numerus), Q, C mit ihnen vorausgehenden Zahlenfactoren ausgedrückt werden. Im Texte steht z. B. $Aq4$, während die Anmerkung $4Q$ enthält. Man könnte geneigt sein, diese Anmerkungen als von Anderson hinzugefügt anzunehmen, dem Vieta's Notizbücher, *Adversaria*, zur Herausgabe anvertraut worden waren, wenn nicht gerade dieser selbst in einer Vorrede, welche in die Gesammtausgabe von 1646 übergegangen ist, erklärte, sowohl die Gleichungen als die nachträglichen Beispiele[96] hätten sämmtlich von ihm nochmals nachgerechnet werden müssen. Uns gelten desshalb also auch die Anmerkungen als von Vieta herrührend, und darin machen uns die einleitenden Worte des Herausgebers der Gesammtwerke nicht irre, „das Folgende sei, was er über die Anmerkungen Anderson's hinaus zu bemerken gefunden habe"[97], denn wir verstehen unter diesen Anmerkungen Anderson's einen Zusatz am Schlusse der Emendatio, der ausdrücklich dessen Namen führt[98]. Aus der Recognitio heben wir nun Folgendes hervor. Vieta spricht die Aufgabe der eigentlichen Gleichungsauflösung in anderer Form aus. Nicht um die Auffindung einer Unbekannten handelt es sich, sondern ***um Herstellung einer aus einer gegebenen Anzahl von Gliedern bestehenden geometrischen Progression***. Aehnlich war die Fragestellung schon bei italienischen Schriftstellern gewesen (S. 487), Veranlassung konnte jene mit einer arithmetischen Indexreihe verglichene Reihe der aufeinander folgenden Potenzen der Unbekannten gegeben haben, welche uns wiederholt aufgefallen ist. Aber Vieta ging über seine Vorgänger weit hinaus. Die quadratische Gleichung leitet sich für ihn aus einer der drei stetigen Proportionen:

$$\begin{array}{rl} & :\ (A+B) \\ A:Z=Z & :\ (A-B) \\ & :\ (B-A) \end{array}$$

ab[99], welche Z^2 als Product zweier Factoren $A(A+B)$, $A(A-B)$, $A(B-A)$ darstellt. Im letzten der drei Fälle ist die gegebene Zahl B in zwei Theile zerlegt, deren, jeder als die Unbekannte betrachtet werden kann, und darin liegt (636)
der Grund der Zweideutigkeit solcher Aufgaben. Die kubische Gleichung stammt

[96] Vieta pag. 83: *exemplorum notae epilogisticae.*
[97] Ebenda pag. 549: *Praeter ea quae hic adnotavit Andersonus animadvertimus porro haec*

aus einer geometrischen Reihe von vier Gliedern[100]. Ist B das gegebene erste, A das unbekannte zweite Glied, so wird $\frac{A^2}{B}$ das dritte, $\frac{A^3}{B^2}$ das vierte Glied, und kennt man nun noch Z als Summe des zweiten und vierten Glieder, so entspricht die Aufgabe der kubischen Gleichen $A^3 = B^2Z - B^2A$. Aehnlich wird auch die Gleichung $A^3 - 3B^2A = B^2D$ einer viergliedrigen Reihe entnommen. Heisst diese Reihe a, ae, ae^2, ae^3 und ist gegeben die Summe D und das Product B^2 der beiden äussersten Glieder, so entspricht die Summe A der beiden inneren Glieder der ebengenannten Gleichung. Hier ist die Uebereinstimmung mit den erst in Erinnerung gebrachten Italienern so gross, dass zur Gewissheit wird, Vieta habe deren Schriften gekannt, was ohnedies durch Zeitfolge und Verkehrsverhältnisse schon fast ausser Zweifel gesetzt war Grade diese Form der kubischen Gleichung bietet aber Veranlassung einmal $x^2 - 300x = 432$ und dann $300x - x^3 = 432$ ins Auge zu fasssen[101], deren erste durch $x = 18$, die zweite durch $x = 9 \pm \sqrt{57}$ erfüllt wird. Vieta vereinigt nicht alle drei Auflösungen, indem er der Gleichung $300x - x^3 = 432$ auch die Wurzel $x = -18$ zuspricht, weil er hier wie anderwärts ***negative Wurzeln nicht anerkennt***. Im Uebrigen erscheint hier bei $B > \frac{1}{2}D$ der ***irreductible Fall***, und Vieta verweist für dessen Klarstellung ausdrücklich auf die Lehre von der Winkeltheilung[102]. Damit ist die aus der Schrift über die Van Roomen'sche Aufgabe schon in hohem Grade wahrscheinliche Annahme sicher gestellt, dass Vieta zur Lösung des genannten Falles von dem trigonometrischen Satze $\cos a^3 - \frac{3}{4}\cos a = \frac{1}{4}\ cos3a$ ausging, und zu dem gleichen Ergebnisse führte (S. 585) ein genaueres Studium der 1591 schon vorhandenen, 1593 gedruckten Schrift Supplementum Geometricum. Nun folgen, immer noch in der Recognitio, Umformungen, *transformationes*. Zwischen zwei Unbekannten A,E können die mannigfachsten Beziehungen obwalten. Die erstere A kann ersetzt werden durch $E - B$, durch $B - E$, durch $B + E$, durch $\frac{E}{B}$, durch $\frac{B}{E}$; es kann zwischen E^2 und AE die Differenz, es kann deren Summe gegeben sein und sonst jede beliebige für zweckmässig erachtete Verbindung[103], immer wird an Stelle der Gleichung in A (637)
eine solche in E treten, und kennt man die Wurzel der einen, so ist die der anderen mitgefunden. Vieta kommt in höchst eigenthümlicher Fassung auf die Vielheit der Wurzeln einer Gleichung zu reden[104]. Er fragt nämlich nach den Beziehungen zwischen solchen Gleichungen, welche nur darin sich unterscheiden, dass die Unbekannte das eine Mal A, das andere Mal E sei, während alle bekannten Grössen unverändert auftreten. Alsdann könne man, sagt er, diese bekannten Grössen

---

quae sequuntur.

[98]Ebenda pag. 159–161: *Appendix ab Alexandro Andersono operi subnexa.*

[99]Ebenda pag. 85–86.

[100]Vieta pag. 86.

[101]Ebenda pag. 91.

[102]*At elegantius et praestantius ex analyticis angularium sectionum huiusmodi aequalitatum constitutio eruitur.*

[103]Vieta pag. 92: *Postremo per modos compositos et excogitanda ab artifice et tentanda, quae suo fini magis inservire coniiciet, figmenta.*

[104]Vieta Pag. 106 sqq.

durch die A und E darstellen, und er versteht darunter ***die Abhängigkeit der Coefficienten einer Gleichung von ihren Wurzeln***. $\overline{F+G}$ in $A - Aq$ aequari F in G sei z. B. die Gleichung, deren Wurzeln F und G sind. Auch hier sind aber nur positive Wurzeln gemeint, und einer Möglichkeit negativer Wurzeln geht Vieta bei quadratischen Gleichungen ebenso aus dem Wege, wie er es bei kubischen Gleichungen that. Er sagt[105], wenn $A^2 + BA = Z^2$ und $E^2 - BE = Z^2$, so müsse $B = E - A$, $Z^2 = EA$ sein. Die Abhängigkeit der Coefficienten von den positiven Wurzeln bei Gleichungen höherer Grade ist Vieta gleichfalls nicht entgangen, doch hat er diese erst in der Emendatio erörtert, deren Besprechung wir uns jetzt zuwenden. Die Verbesserung einer Gleichung besteht in der Anwendung von Mitteln, welche die Recognitio bereits kennen lehrte. Vieta giebt diesen Mitteln einzelne Namen, welche hier erwähnt werden mögen, um zu rechtfertigen, was früher von Vieta's Benennungssucht bemerkt wurde. *Expurgatio per uncias*[106] ist die Wegschaffung des zweithöchsten Gliedes in der Gleichung n-ten Grades durch die Einsetzung von $x = y - \frac{a}{n}$, wie man in den Zeichen neuerer Algebra, deren wir von hier an uns zu bedienen gedenken, schreiben würde. Insbesondere bei quadratischen Gleichungen in ihren sämmtlichen drei althergebrachten Formen wird die Anwendung gelehrt und damit jede derselben in eine reinquadratische Gleichung umgeformt, mithin gelöst. Auch bei der kubischen Gleichung ist die Anwendung bei allen zahlreichen Einzelfällen, welche sich unterscheiden lassen, vorgenommen. *Transmutatio* $\pi\varrho\omega\tau o\upsilon$ — $\epsilon\sigma\chi\alpha\tau o\upsilon$[107], setzt $x = \frac{k}{y}$ und schafft dadurch ebensowohl Minuszeichen als irrationale Gleichungsconstanten weg. Sei $x^4 - 8x = \sqrt[3]{80}$ vorgelegt. Mittels $x = \frac{\sqrt[3]{80}}{y}$ gelangt man zu $y^4 + 8y = 80$. *Anastrophe*[108] findet ihre Anwendung bei Gleichungen ungeraden Grades und besteht in folgendem: $ax - x^3 = k$ lässt die Folgerung $x^3 + y^3 = ax + (y^3 - k)$ zu. Wäre nun $y^3 - k = ay$ (638)
oder $y^3 - ay = k$, so könnte jene gefolgerte Gleichung durch $x + y$ dividirt werden und gäbe den Quotienten $x^2 - yx + y^2 = a$, d. h. eine nach x quadratische Gleichung, welche leicht gelöst ist, wenn man y kennt. Die Umwendung bestand also in der Zurückführung von $ax - x^3 = k$ auf $y^3 - ay = k$. Aehnlich verwandelt man $ax^2 - x^3 = k$. Zunächst schreibt man $x^3 + y^3 = ax^2 - (k - y^3)$; dann nimmt man an, es sei $k - y^3 = ay^2$, also $y^3 + ay^2 = k$ der Lösung unterbreitet; zuletzt wird wieder mit $x + y$ in die dazu vorbereitete Gleichung dividirt, und es entsteht neuerdings eine quadratische Gleichung $x^3 - yx + y^2 = ax - ay$. ***Isomoeria***[109] heisst die Umwandlung in Folge von $x = \frac{y}{a}$ oder von $x = ay$, welche entweder Brüche fortschafft oder Gleichungsconstanten herabsetzt. $x^3 + \frac{11}{12}x = \frac{57}{12}$ verwandelt sich durch $x = \frac{y}{12}$ in $y^3 + 132y = 8208$, während $x^3 + 12x^2 + 8x = 2280$ durch $x = 2y$ in $y^3 + 6y^2 + 2y = 285$ übergeht. Dann kommt noch ***Climactica Paraperosis***[110]

[105] Ebenda pag. 123–124.
[106] Ebenda pag. 127–132.
[107] Ebenda pag. 132–134.
[108] Ebenda pag. 134–138.
[109] Vieta pag. 138-139.
[110] Ebenda pag. 140.

welche das Rationalmachen einzelner Coefficienten durch Potenzirung bezweckt, worauf der Grad der neuen Gleichung dadurch wieder herabgesetzt wird, dass man eine Potenz der Unbekannten als neue Unbekannte wählt. Nach diesen fünf Verbesserungsverfahren wendet sich Vieta zur Gleichung 4. Grades, die er auf eine solche 3. Grades zurückführt[111]. Schält man aus den behandelten Einzelfällen den gemeinsamen Gedanken heraus, so zeigt sich eine Verwandtschaft mit FERRARI's Verfahren (S. 509), insofern die vom kubischen Gliede befreite Gleichung so umgewandelt wird, dass eine Quadratwurzelausziehung thunlich ist, aber volle Uebereinstimmung ist nicht vorhanden. Vieta schliesst nämlich von $x^4+ax^2-bx=c$

$$\text{auf}\quad x^4+x^2y^2+\frac{1}{4}y^4=x^2y^2+\frac{1}{4}y^4+c-ax^2-bx$$

$$\text{oder}\quad (x^2+\frac{1}{2}y^2)^2=(y^2-a)x^2-bx+(\frac{1}{4}y^4+c).$$

Die Quadratwurzelausziehung rechts ist möglich., wenn $4(y^2-a)(\frac{1}{4}y^4+c)=b^2$ oder $y^6-ay^4+4cy^2=4ac+b^2$, beziehungsweise bei $y^2=z$, wenn $z^3-az^2+4cz=4ac+b^2$. So ist Vieta zu der Notwendigkeit gelangt, die kubische Gleichung aufzulösen, und er schlägt dabei einen ihm eigenthümlichen Weg ein[112], welcher um so geistreicher erscheint, je gewisser wir (S. 636) behaupten konnten, dass Vieta mit den Arbeiten seiner italienischen Vorgänger bekannt gewesen sein muss.
Sei $x^3+3ax=2b$, so ist $y^2+xy=a$ zu setzen, also $x=\frac{a-y^2}{y}$, wodurch, die (639)
gegebene Gleichung in die nach y^3 quadratische Form $y^6+2by^3=a^3$ übergeht. Wie kam Vieta zu dieser Substitution? Er sagt es nicht, aber es ist, glauben wir, gelungen[113], seinen Gedankengang herzustellen. Er mag $x^3+3ax=x(x^2+3a)$ gesetzt und an seine Anastrophe gedacht haben, d. h. er wollte den einen Factor als Differenz $z-k$, den anderen als z^2+kz+k^2 herstellen, damit als Product die Differenz z^3-k^3 auftrete, auf welche Tartaglia's Verse schon hinwiesen (S. 488). Ist aber $x=z-k$, so ist $x^2+3a=z^2-2kz+k^2+3a$, und dieses wird zu z^2+kz+k^2, wenn $z=\frac{a}{k}$, d.h. $x=\frac{a}{k}-k=\frac{a-k^2}{k}$. Nun war bei dieser Annahme die Unbekannte ganz verloren gegangen. Vieta versuchte, ob $k=y$ gesetzt deren Stelle einnehmen könne, und das Gelingen des Versuchs bildete die neue Auflösung. Vieta giebt nun noch eine Anzahl von Betrachtungen, welche auf besonders geformte Coefficienten, auf Rationalität oder Irrationalität der Gleichungswurzel u. s. w. sich beziehen und schliesst die Abhandlung mit einem Collectio quarta überschriebenen Kapitel[114], welches den Zusammenhang zwischen den positiven Wurzeln einer Gleichung und deren Coefficienten vollständig enthüllt, welcher in der Recognitio erst angedeutet war. Die Gleichungen 2., 3., 4., 5. Grades werden vorgeführt: $x=a$, $x=b$ seien die zwei Wurzeln von

$$(a+b)x-x^2=ab;$$

[111] Ebenda pag. 140-148.
[112] Ebenda pag. 149-156.
[113] MARIE, *Histoire des sciences mathématiques et physiques* III, 59-60.
[114] VIETA pag. 158.

$x=a,\ x=b,\ x=c$ seien die drei Wurzeln von

$$x^2-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x=abc;$$

$x=a,\ x=b,\ x=c,\ x=d$ seien die vier Wurzeln von

$$\begin{gathered}(abc+abd+acd+bcd)x\\-(ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2\\+(a+b+c+d)x^3-x^4=abcd;\end{gathered}$$

$x=a,\ x=b,\ x=c,\ x=d,\ x=e$ sind die fünf Wurzeln von

$$\begin{gathered}x^5-(a+b+c+d+e)x^4\\+(ab+ac+ad+ae+bc+bd+be+cd+ce+de)x^3\\-(abc+abd+abe+acd+ace+ade+bcd+bce+bde+cde)x^2\\+(abcb+abce+abde+acde+bcde)x=abcde,\end{gathered}$$

und damit wolle er die Abhandlung krönen; er habe anderwärts ausführlich davon gehandelt[115]. Wo diese ausführliche Behandlung stattfand, ist durchaus unbekannt; wir wagen es kaum, unsere Leser an die verlorenen *Notae posteriores ad Lo-* (640)
gisticen speciosam denken zu lassen. Auffallen könnte der Wechsel der Anordnung in den vier Gleichungen. Beim 2. und 4. Grade beginnt das Gleichungspolynom mit der ersten, beim 3. und 5. Grade mit der höchsten Potenz der Unbekannten. Der Grund davon liegt auf der Hand. Vieta will die Gleichungsconstante immer positiv und will auch das Gleichungspolynom immer mit einem positiven Gliede anfangen lassen.

Wir sind bei der letzten Abhandlung Vieta's angelangt: *De numerosa potestatum purarum atque adfectarum ad exegesin resolutione*[116]. Auch sie steht im Bande von 1591 als eine Abtheilung der Algebra vorn aufgezeichnet, aber auch sie ist erst wesentlich später gedruckt GHETALDI hat 1600 in Paris die Herausgabe besorgt[117]. Zuerst ist die Auflösung von reinen Gleichungen vollzogen[118], wozu es selbstverständlich nur Wurzelausziehungen bedarf. Vieta zieht solche ***Wurzeln bis zur sechsten***, wobei die Binomialcoefficienten der betreffenden Potenz als bekannt vorausgesetzt sind; langwierige Rechnungen, deren Unverlässlichkeit es geradezu zu einer Lebensfrage der Rechenkunst machte, bald ein anderes sie ersetzendes Mittel zu ersinnen. Der weit umfassendere zweite Abschnitt[119] handelt von den unreinen Gleichungen, welche ***in näherungsweiser*** Auflösung nach einem der Wurzelausziehung verwandten Verfahren behandelt werden. Es ist ein

---

[115] *Atque haec elegans et perpulchrae speculationis sylloge, tractavi alioquin effuso, finem aliquem et Coronidem tandem imposito.*
[116] VIETA pag. 163–228.
[117] Ebenda pag. 550.
[118] Ebenda pag. 163–172.
[119] Ebenda pag. 173–228.

Verfahren, welches zwar mit dem Grade der Gleichung sich ändert, mithin als ein vollkommen einheitliches nicht erachtet werden kann; als weiterer Mangel ist stets die Auffindung nur einer, und zwar positiven Wurzel angestrebt, aber immerhin ist der Grundgedanke ein bleibender und ein weit vollkommenerer als der, dessen Erfinder Stevin war. Sei die quadratische Gleichung $x^2 + cx = a$ zu lösen, welche durch die Wurzel $x = x_1 + x_2 + x_3$ erfüllt werde, deren einzelne Bestandteile Ziffern von aufeinanderfolgendem Stellenrange bedeuten sollen. Die Gleichung nimmt durch Einsetzung dieses Werthes die Gestalt an:

$$\begin{aligned} a &= x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2 + cx_1 + cx_2 + cx_3 \\ &= x_1^2 + cx_1 + (2x_1 + c)x_2 + x_2^2 + (2(x_1 + x_2) + c)x_3 + x_3^2. \end{aligned}$$

Man sucht zuerst x_1 was verhältnissmässig leicht ist, bildet alsdann $a - x_1^2 - cx_1$ und sucht mittels Division durch $2x_1 + c$ die nächste Stelle x_2 zu ermitteln u. s. w. Wir wollen Vieta's Beispiel

$$x^2 + 7x = 60750$$

prüfen[120]. Hier ist $x_1 = 200$. Dann ist $60750 - 41400 = 19350$ durch $2x_1 + 7 = 407$ zu dividiren, wodurch (641)

$$x_2 = 40, \quad (2x_1 + c)x_2 + x_2^2 = 17880$$

entsteht, und der nächste Rest ist $19350 - 17880 = 1470$. Der weitere Divisor ist $2(x_1 + x_2) + c = 487$, der Quotient also $x_3 = 3$. Nun lässt $(2(x_1 + x_2) + c)x_3 + x_3^2 = 1470$ den Rest 0 erscheinen, folglich ist $x = 243$. Bei einer Gleichung dritten Gerades $x^3 + cx = a$, deren Wurzel wieder als $x = x_1 + x_2 + x_3$ gedacht ist, findet sich durch Einsetzung dieses Werthes und leichte Umformung

$$\begin{aligned} a &= x_1^3 + cx_1 + (3x_1^2 + c)x_2 + (3x_1 + x_2)x_2^2 \\ &+ (3(x_1 + x_2)^2 + c)x_3 + (3(x_1 + x_2) + x_3)x_3^2. \end{aligned}$$

und die Anwendung[121] auf $x^3 + 30x = 14356197$ liefert abermals $x = 243$. Zur Auflösung von $x^3 + cx^2 = a$ führt die Formel[122]

$$\begin{aligned} a &= x_1^3 + cx_1^2 + (3x_1^2 + 2cx_1)x_2 + (3x_1 + x_2 + c)x_2^2 \\ &+ 3(x_1 + x_2)^2 + 2c(x_1 + x_2))x_3 + (3(x_1 + x_2) + x_3 + c)x_3^2. \end{aligned}$$

Wir begnügen uns mit dieser Angabe und mit der Bemerkung, dass, Vieta als so unerschrockener Rechner sich bewährt, dass er an die Gleichung $x^6 + 6000x =$

[120] Ebenda pag. 174–175.
[121] Vieta pag. 177–178.
[122] Ebenda pag. 180. Vieta's Beispiel ist $x^3 + 30x^2 = 86220288$.

191246976 sich wagt[123]. Auch Fälle mit negativem x werden dann untersucht, wie[124] $x^2 - 240x = 484$ mit der Wurzel $x = 242$ u. s. w.

Den Leistungen eines Vieta gegenüber, welche seit 1591 zur Veröffentlichung vorbereitet, theilweise seit eben jener Zeit veröffentlicht worden sind, erscheint doppelt dürftig, was im letzten Jahrzehnt des XVI. Jahrhunderts in Deutschland unter dem Namen Algebra gedruckt werden konnte. Wir müssen dahin die (S. 612) im Vorbeigehen erwähnte, 1592 gedruckte Algebra von Ramus zählen, für welche vielleicht mit mehr Recht Lazarus Schoner verantwortlich zu machen ist, dahin auch ein Rechenbuch von Andreas Helmreich[125] von Eissfelde, Rechenmeister und Visirer zu Halle, welches 1595 die Presse verliess Wir bemerken, dass Ramus die unbekannte Grösse durch l als Anfangsbuchstaben von *latus* bezeichnet. Helmreich und sein Buch würden wir der verdienten Vergessenheit überlassen, wenn es nicht eine eigenthümliche Uebereinstimmung mit der (S. 612) gleichfalls erwähnten Göttinger Handschrift von 1545–1548 zeigte, welche einen immerhin beachtenswerthen Gegenstand betrifft. Bei Helmreich findet sich eine geschichtlich sein sollende Notiz von einem Algebras zu Ulem, dem grossen Geometer in Egypten zur Zeit des Alexandri Magni, der da war ein Präceptor Euklid's des Fürsten von Megarien und dergleichen tolles Zeug (642)
noch mehr. Genau derselbe Wust eröffnet als Prolog jene Handschrift, nur noch etwas ausführlicher. Auch eine noch ältere, auf das XIV. bis XV. Jahrhundert geschätzte Handschrift in Dresden[126] enthält ähnlichen Wust Da soll das Buch arabisch verfasst sein zur Zeit Alexander des Grossen, von diesem ins Indische, von Archimed ins Griechische, von Appulejus ins Lateinische übersetzt sein. Die Anfangsworte der Göttinger Handschrift lauten: *Algebrae Arabis Arithmetici viri Clarissimi liber ad Ylem Geometram praeceptorem suum*, und das Sonderbarste dabei ist, dass dieses **Ylem**, wie es bei dem Einen, **Ulem** wie es bei dem Anderen heisst, eine Verketzerung eines arabischen Wortes, welches **Lehren** bedeutet, sehr ähneln soll, wie Sprachkundige uns versichern. Hier könnte also die Erinnerung, wenn nicht gar die mittelbare Erhaltung einer sonst nicht näher bekannten arabischen Algebra vorhanden sein.

Dem gewiss gerechten Bedauern über die Drucklegung so unbedeutender Leistungen in Deutschland könnte ein mit der Literatur geringen Gehaltes in anderen Ländern genauer bekannter Leser vielleicht ein Wort des Trostes entgegensetzen, es sei auch dort die Druckerschwärze nicht selten missbraucht worden. Wir begnügen uns mit dem jedenfalls angenehmeren Gefühle, zum Schlusse des Abschnittes auch noch Männer nennen zu können, welche in Deutschland sich wirkliche Verdienste um die Algebra erworben haben: Joost Bürgi, Pitiscus und Raimarus Ursus. Bürgi[127] kam zu den algebraischen Arbeiten bei Berechnung

[123]Ebenda pag. 193.
[124]Ebenda pag. 197.
[125]Kästner I, 147–149.
[126]Codex Dresdensis C. 405. Curtze brieflich.
[127]Vergl. einen Auszug aus den in Pulkowa aufbewahrten Bürgi'schen Papieren von Rud.

einer genauen Sinustabelle, die selbst einen doppelten Zweck erfüllen sollte. Sie sollte einmal da dienen, wo in Folge trigonometrisch behandelter Aufgaben Sinusse vorkamen, sie sollte zweitens bei **prosthaphäretischen Multiplicationen** in Anwendung treten. Es ist (S. 454) gezeigt worden, worin dieses Verfahren bestand, und (S. 597) dass es WERNER zugeschrieben worden ist. Damit fällt die Erzählung, welche Raimarus Ursus entstammt[128]. Der eigentliche Erfinder wäre darnach PAUL WITTICH aus Breslau, der um 1582 bei TYCHO BRAHE auf der Insel Hveen war und dort, vielleicht mit Tycho gemeinsam, das Verfahren ersann und übte. Als er etwa 1584 nach Kassel kam, habe er es ohne Beweis BÜRGI mitgetheilt, der nun selbst einen Beweis fand, dabei die Fruchtbarkeit des Satzes erkannte und ihn erweiterte. Wittich's Satz, den er sehr wohl selbständig (643)
nacherfunden haben kann, war vermuthlich der folgende:

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(90^o-\alpha+\beta)-\sin(90^o-\alpha-\beta)]$$

d.h.

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}[cos(\alpha-\beta)-cos(\alpha+\beta)]$$

unter der Voraussetzung $\alpha+\beta<90^o$, und Bürgi's Erweiterung liess $\alpha+\beta>90^o$ zu, so dass alsdann

$$\sin\alpha\cdot\sin\cdot = \frac{1}{2}[\sin(90^o-\alpha+\beta)+\sin(\alpha+\beta-90^o)].$$

Gegenwärtig ist dieses wegen $\sin A = -\sin(-A)$ sofort einleuchtend und bedarf keines neuen Beweises. In den achtziger Jahren des XVI. Jahrhunderts war das noch wesentlich anders, und jede Formel musste besonders entdeckt werden. Wir erinnern nur an die noch anderen, wenn auch prosthaphäretischen Formeln sehr nahe verwandten Gleichungen des Rhäticus (S. 602). Um so überraschender ist eine weitere Anwendung, welche Bürgi von dem Gedanken der Prosthaphäresis machte, und die in wiederholter Benutzung desselben unter wahrscheinlich **erstmaliger Einführung eines Hilfswinkels** besteht. Die Formel der sphärischen Trigonometrie

$$\cos a = \cos b\cdot\cos c+\sin b\cdot\sin c\cdot\cos A$$

verwandelte er durch $\sin b\cdot\sin c = \frac{1}{2}[\cos(b-c)-cos(b+c)] = \cos x$ in die nur Additionen erfordernde Gestalt

$$\cos a = \frac{1}{2}[cos(b-c)+cos(b+c)+cos(x-A)+cos(x+A)].$$

Ein gewisser JACOB CURTIUS scheint dann CLAVIUS von der prosthaphäretischen Methode Kenntniss gegeben zu haben, der selbst wiederum an Tycho darüber

WOLF indessen Astronomischen Mittheilungen Nr. XXXI (Zürich 1872).

[128] RUD. WOLF, Astron. Mittheilungen Nr. XXXI S. 10–11 und Nr. XXXII S. 55–67.

schrieb. Andere erhoben gleichfalls Ansprüche auf die Urheberschaft der damals wichtigen Methode, aber ohne dass dieselben gerechtfertigt erscheinen. Jedenfalls war also Bürgi's Augenmerk auf die Herstellung einer genauen Sinustafel gerichtet, und dazu musste er in geometrische Untersuchungen eintreten, welche ihm Gleichungen zwischen einer Sehne und der Sehne n-ten Theils ihres Bogens verschafften. Bei $n = 2$ war das Quadrat der Sehne $4x^2 - x^4$. Bei $n = 3$ war die Sehne $3x - x^3$. Bei $n = 4$ war das Quadrat der Sehne $16x^2 - 20x^4 + 8x^6 - x^8$, wofür Bürgi $\overset{II}{16} - \overset{IV}{20} + \overset{VI}{8} - \overset{VIII}{1}$ schrieb, und ähnliche Gleichungen leitete er ab bis zu $n = 20$. Die Schreibweise, welche wir eben als die Bürgi's bezeichneten[129],
und welche wiederholt in dessen Papieren älteren Datums vorkommt, aus einer (644)
Zeit, in welcher Bürgi noch nicht Kepler bekannt war, ähnelt der von Bombelli sowie der von Stevin, doch dürfen wir desshalb die Selbständigkeit Bürgi's hier so wenig anzweifeln, als bei der Erfindung der Decimalbrüche (S. 617). Wir haben das frühe Datum betont, zu welchem Bürgi seiner Bezeichnung der Potenzen der Unbekannten sich bediente, weil damit ein Widerspruch, wenn nicht erklärt, doch unwirksam gemacht wird, der in einem Ausspruche Kepler's enthalten ist. Im I. Buche der 1619 gedruckten *Harmonice mundi* setzt Kepler mit ausdrücklicher Beruft auf Bürgi die Gleichung auseinander, welche die Seite des regelmässigen Sehnensiebenecks im Kreise vom Halbmesser 1 bestimmen lasse. Bürgi, sagt er[130], schreibe $1R, 1z, 1c, 1zz, 1zc$ u. s. w. und dann fährt er fort: *quod nos commodius signabimus per apices sic*, was ich bequemer durch Gipfelzahlen bezeichnen will, nämlich so

$$1, 1^{I}, 1^{II}, 1^{III}, 1^{IV}, 1^{V}, 1^{VI}, 1^{VII} \text{ etc.}$$

Man wird darnach annehmen müssen, dass Bürgi in seiner Schreibweise wechselte, und dass er gerade an der hier von Kepler erwähnten Stelle sich der althergebrachten Bezeichnungen bediente, welche dann Kepler durch diejenigen ersetzte, von denen er wusste, dass Bürgi sich ihrer meistens zu bedienen pflegte. Dass er letzteres nicht durch eine besondere Bemerkung hervorhob, mag darin seinen Grund gehabt haben, dass er der Sache keine übermässige Wichtigkeit beilegte und sich keineswegs eine Erfindung zuschreiben, sondern eine getroffene Abänderung entschuldigen wollte. Die Stelle des Kepler'schen Werkes lehrt in ihrer Fortsetzung noch zwei hochwichtige Dinge kennen, welche als Bürgi's Eigenthum erscheinen. Die betreffende Gleichung der Siebenecksseite, heisst es nämlich weiter, sei die folgende: *figurae nihili aeque valent quantitates hae*

$$7^{I} - 14^{III} + 7^{V} - 1^{VII} \text{ vel } 7 - 14^{II} + 7^{IV} - 1^{VI}.$$

Prodit autem illi ex aequatione, quam iuvat mechanice, valor radicis non unus, sed in quinquangudo duo, in septangulo tres, in nonangulo quatuor et sic consequenter. Bürgi hat darnach mit vollem Bewusstsein erstens ***die Gleichung***

[129] Rud. Wolf, Astronom. Mittheilungen Nr. XXXI S. 18.
[130] *Opera Kepleri* (ed. Frisch) V, 104.

auf Null gebracht, zweitens erkannt, dass unter Benutzung derselben Theilpunkte der Kreisperipherie als Eckpunkten 2 Fünfecke, 3 Siebenecke, 4 Neunecke u. s. w., allgemein n Vielecke von $2n + 1$ Seiten möglich seien, wenn man ausser dem convexen Vielecke auch die Sternvielecke verschiedener Ordnung in Betracht ziehe, und dass ***die Seiten der letzteren Vielecke die weiteren Wurzelwerthe der gegebenen Gleichung seien***. Wir haben ge- (645)
sagt, dass Bürgi Gleichungen zwischen den Sehnen des einfachen und des n-fachen Bogens bis zu $n = 20$ abgeleitet habe. Er hat sie auch in Form einer Tabelle zusammengestellt, deren beliebige Ausdehnung möglich sei. Um die Sehne von 4 Winkelsecunden zu erhalten, müsse man erwägen, dass

$$360^o = 360 \cdot 60 \cdot 60 = 1296000''$$

das 324000-fache von 4" sei, und müsse die Tafel so weit verlängern. „Ich will Dirs aber nit rathen diss zu besorgen, Du möchtest das Nachtmahl darüber versäumen“ meint er dabei und fährt fort, man könne, wegen $324000 = 2^5 \cdot 3^4 \cdot 5^3$, sich etwas leichter die nothwendige Gleichung verschaffen, indem man 5 Verdoppelungen des Bogens, 4 Verdreifachungen, 3 Verfünffachungen nach einander vornehme. Bürgi war also, und zwar muthmasslich gleichfalls selbständig, zu ganz ähnlichen Ergebnissen gelangt wie Van Roomen und Vieta jeder für sich (S. 606). Die Frage, welche uns gegenwärtig die bedeutsamste ist, richtet sich darauf, wie Bürgi die einmal aufgestellten Gleichungen von theilweise sehr hohem Grade zur näherungsweisen Auflösung brachte. Bei der Dreitheilung kam es, wenn x die Sehne des einfachen, 1 die Sehne des dreifachen Bogens darstellte, auf die Gleichung $1 = 3x - x^3$ an und dabei insbesondere auf die Auffindung einer Verbesserung Δx_1, nachdem ein Näherungswerth x_1 einmal gefunden war. Die Einsetzung von $x = x_1 + \Delta x_1$ in $1 = 3x - x^3$ liefert

$$3x_1^2 \cdot \Delta x_1 + 3x_1 \cdot \Delta x_1^2 + \Delta x_1^3 - 3\Delta x_1 = 3x_1 - x_1^3 - 1 = (3 - x_1^2)x_1 - 1$$

$$\text{und daraus} \quad \Delta x_1 = \frac{(3 - x_1^2)x_1 - 1}{2x_1^2 + (3x_1 + \Delta x_1)\Delta x_1 - (3 - x_1^2)}.$$

Wir haben gewiss nicht erst zu sagen, dass Bürgi keine auch nur ähnliche Entwicklung vornimmt, Thatsache ist aber, dass er bei der wirklichen Rechnung nur den im Nenner auftretenden Theil $(3x_1 + \Delta x_1)\Delta x_1$ durch $2x_1 \cdot 10^n$ ersetzt, wo n die Stellung der gesuchten Verbesserung bestimmt, beziehungsweise den Rang derjenigen decadischen Einheit ergiebt, welche grösser ist als die Verbesserung. Er setzt nämlich $x_1 = 1$ and gleichzeitig $n = 0$, so wird $\Delta x_1 = \frac{1}{2} = 0,5$ und $x_1 + \Delta x_1 = x_2 = 1,5$. Jetzt wird $n = -1$ und

$$\Delta x_2 = \frac{(3 - 1,5^2)1,5 - 1}{2 \cdot 1,5^2 + 2 \cdot 1,5 \cdot \frac{1}{10} - (3 - 1,5^2)} = \frac{0,125}{4,05} > 0,03.$$

Man wird daher $\Delta x_2 = 0,03$, $x_2 + \Delta x_2 = x_3 = 1,53$, $n = -2$ setzen müssen, ***und das ist es, was Bürgi thut!*** Bei höherem Grade der Gleichung rechnet

Bürgi nach einer verfeinerten Methode des doppelten falschen Ansatzes, auf welche auch Cardano's goldene Regel sich gründete (S. 506). Der Auszug aus der Pulkowaer Handschrift, welchem wir folgen, giebt als Beispiel Bürgi's Behandlung der Neunecksgleiehung $9 - 30x^2 + 27x^4 - 9x^6 + x^8 = 0$. Durch graphische Versuche wird gefunden, dass $0,68 < x < 0,69$, d. h. dass eine Länge von 0,68 des Halbmessers eines Kreises in den Zirkel genommen mehr als 9 Mal im Umkreise sich auftragen lässt, während 0,69 bei gleichem Versuche über den Ausgangspunkt hinaustrifft. Jetzt beginnt für Bürgi die Rechnung und indem er für x die beiden genannten Werthe in die Gleichung einsetzt, findet er selbstverständlich als Summe des Gleichungspolynoms nicht 0, sondern $+0,0569$ bei $x = 0,68$ und $-0,0828$ bei $x = 0,69$. Einer Zunahme von x um 0,01 entspricht eine Abnahme des Gleichungspolynoms von 0,1397. Damit 0 entstände, müsste die Abnahme 0,0569 betragen, Bürgi setzt desshalb in Proportion $0,1397 : 0,0569 = 0,01 : \Delta x$ mit $\Delta x = 0,0040$. Behufs einer zweiten Rechnung wird nun $x = 0,6840$ und $x = 0,6841$ eingesetzt. Die hier auftretenden Fehler sind $+0,00056410$ bei $x = 0,6840$ und $-0,00004029$ bei $x = 0,6841$. Aus ihnen folgt die Proportion (646)

$$0,00140012 : 0,00056410 = 0,0001 : \Delta x \quad \text{mit } \Delta x = 0,00004029,$$

und folglich ist in sehr bedeutender Annäherung $x = 0,68404029$ zu setzen.

Die gleiche Aufgabe der Auffindung von Sehnen einfacher Bögen aus denen der n-fachen Bögen mit Hilfe von zwischen diesen Strecken obwaltenden Gleichungen höherer Grade hat Pitiscus im zweiten Buche seiner Trigonometrie von 1612 erklärtermassen ***im Sinne Bürgi's*** (S. 619) gelöst[131]. Die nach der Regel des doppelten falschen Ansatzes geführten Rechnungen stimmen auch vollständig mit Bürgi's Gedankengange überein. Pitiscus will z. B. aus der Sehne von 30^o, welche 5176381 zur Länge hat, die von 10^o berechnen. Die Gleichung heisst hier $a = 3x - x^3$, wo a die bekannte Sehne bedeutet[132]. Aus ihr folgt $x = \frac{a}{3} + \frac{x^3}{3}$ oder $x > \frac{a}{3}$. Nun ist $\frac{a}{3} = 1725460$, und etwas grössere Zahlenwerthe wären 1730000, 1740000, 1750000. Die Annahme $x = 1730000$ giebt $3x - x^3 = 5138223$ oder 38158 zu wenig. Die Annahme $x = 1740000$ giebt $3x - x^3 = 5167320$ oder 9061 zu wenig. Nun wird nach den Regeln des doppelten falschen Ansatzes $1740000 \cdot 38158 - 1730000 \cdot 9061 = 50719390000$ durch $38158 - 9061 = 29097$ dividirt, wodurch der Quotient 1743114 sich ergiebt, und dieser dient als neuer Näherungswerth. Setzt (647)
man ihn in $3x - x^3$ ein, so entsteht 5176378 oder 3 zu wenig. Richtig muss demnach ein x sein, welches um ein Geringes grösser ist als 1743114. Der Versuch zeigt, dass 1743115 bereits zu gross ist, dass also x zwischen den beiden angegebenen Zahlen liegt, welche ganzzahlig geschrieben ebenso wie der Zahlenwerth von a, als Theile des zu 10000000 angesetzten Halbmessers verstanden werden müssen.

[131] Pitiscus, *Trigonometria*, (1612) pag. 44: *Adhuc aliter, per subtensas et per Algebram ex mente Iusti Byrgii (Algebram qui nescit, Algebraica transiliat, hic et per totum reliquum librum. Non enim necessitati, sed tantum curiositati haec data sunt).*

[132] Ebenda pag. 51–53.

Die Zwischenrechnungen sind bei Pitiscus nicht ausführlicher als hier in unserem Berichte mitgetheilt. Algebraisch nennt Pitiscus folgende Behandlung z. B. der Gleichung $(10000000)^2 = 4x^2 - x^4$, welche x als Sehne von 30^o enthält, wenn die Sehne von 60^o oder der Halbmesser als 10000000 gegeben ist[133]. Die durch $x^2 = y$ umgeformte Gleichung $4y = 10^{14} + y^2$ lässt erkennen, dass man 4 als Divisor des Ausdruckes rechts zu benutzen hat, dem man aber bei Fortsetzung der Division immer die Verbesserung y^2 wieder hinzufügen muss. Ist etwa $y = y_1+y_2+y_3+\ldots$, wo $y_1, y_2, y_3 \ldots$ aufeinanderfolgende Stellen bedeuten, so kommen bei fortschreitender Division regelmässig zwei Nullen vom Dividendus an den Theilrest herunter, und überdies ist bei der ersten Division an der niedrigsten Stelle, d. h. rechts, y_1^2 zu addieren, bei der zweiten Division ebenda $2y_1y_2 + y_2^2$, bei der dritten $2(y_1 + y_2)y_3 + y_3^2$ u. s. w. Zum mindesten geht solches aus dem Verfahren des Pitiscus hervor, das Verfahren zu erläutern schien ihm entweder überflüssig oder unausführbar. Er rechnet $1 : 4 = 0, 10 : 4 = 2$, nimmt also $y_1 = 2$, $y_1^2 = 4$ und bildet $100 + 4 - 80 = 24$ beziehungsweise unter Herabziehung von zwei Nullen 2400. Nun heisst es weiter

$$24 : 4 = 6 = y_2, \quad 2y_1y_2 + y_2^2 = 2 \cdot 20 \cdot 6 + 36 = 276,$$

also $2400 + 276 - 2400 = 276$ ist der neue Rest, 27600 der neue Dividendus. $27 : 4 =$ beinahe $7 = y_3$. Nun folgt

$$2(y_1 + y_2)y_3 + y_3^2 = 2 \cdot 260 \cdot 7 + 49 = 3689,$$

27600 + 3689 - 28000 = 3289 und 328900 als neuer Dividendus u. s. w. Wir sahen, dass y_3 etwas grösser gewählt wurde und gewählt werden durfte, als $27 : 4$ eigentlich zulässt, weil vor der Abziehung des Theilproductes der Theildividendus noch eine Ergänzung erfuhr. Das Gleiche tritt jedesmal ein, und demgemäss wird man stets den Versuch wagen müssen, den Theilquotienten eher etwas zu gross als zu klein zu wählen. Pitiscus nennt bei dem soeben beschriebenen Verfahren die unbekannte Grosse *latus* und bezeichnet sie, ihr Quadrat und Biquadrat durch l, q, bq. Daneben hat bei ihm l auch die Bedeutung der Seite eines gegebenen Quadrates, d. h. einer Quadratwurzel. (648)

Noch ein zweiter Schüler Bürgi's hat auf Auflösung von Zahlengleichungen sein Augenmerk gerichtet: Raimarus Ursus[134], als Verbesserer des Junge'schen Verfahrens (S. 626). Raimarus schlägt nämlich vor, statt eines beliebigen Versuchswerthes der unbekannten Grösse einen derartigen zu wählen, dass die Muthmassung „nicht mehr so vnendlich circumvagiern vnd vmbschweiffen mag". Dazu habe man ein Mittel „durch Erfindung aller Divisorum oder theiler". Die Stelle lässt kaum eine andere Deutung zu, als dass Raimarus verlangt, man solle die einzelnen Theiler der Gleichungsconstante versuchsweise statt der Unbekannten einsetzen. Er wird wohl dabei nicht das Bewusstsein gehabt haben, dass der

[133] Pitiscus *Trigonometria* (1612) pag. 47–49.
[134] Gerhardt, Mathem. Deutschl. S. 85.

Wurzelwerth ein Theiler der Gleichungsconstanten sein müsse; diese Kenntniss war ihm fern Er dachte nur daran, dass, wenn etwa $x^3 = 486 - 90x - 21x^2$ zur Auflösung vorlag, der Theiler 3 der Zahl 486 es möglich machte $486 - 90x$ zu $3(162 - 90)$ u. s. w. umzuwandeln, beziehungsweise zu vereinigen.

Unsere in diesem Abschnitte getroffene Anordnung entbindet uns der Aufgabe, nochmals zusammenfassend zu erörtern, was auf jedem Gebiete geleistet worden ist, da diese Leistungen schon gebietweise vereinigt auftreten. Zur Würdigung einzelner, besonders hervorragender Geister müssen wir dagegen, wie wir (S. 546) es in Aussicht gestellt haben, deren Einzelleistungen zu einem Gesammtbilde vereinigen. Stevin, Vieta, Bürgi waren Männer so umfassender Thätigkeit, dass bei ihnen geboten erscheint, was wir zusagten. Zur Schilderung Bürgi's besitzen wir noch nicht alle Züge. Eine gewaltige Leistung wird erst der nächste Abschnitt uns vor die Augen führen. Nur Stevin und Vieta bilden unsere augenblickliche Aufgabe.

Stevin war uns ein Mechaniker allerersten Ranges, war uns der erste Erfinder des Rechnens mit Decimalbrüchen, der Empfehler ihrer praktischen Einführung. Er war endlich der Urheber einer ersten theoretisch richtig erdachten Auflösung von Zahlengleichungen.

Vieta ragt noch ungleich grösser aus seiner geistigen Umgebung hervor. Ein gewandter Geometer, ein geistreicher Zahlentheoretiker, ein geübter Rechner in cyclometrischen Untersuchungen würde er schon um der Leistungen auf diesen Gebieten willen zu den aussergewöhnlichen Schriftstellern gehören. Grösseres leistete er in der Lehre von den trigonometrischen Functionen, in der Lehre von den Gleichungen, in der Verbindung beider Gebiete. Das Grösste ist und bleibt seine Erfindung der Buchstabenrechnung, die Ausdehnung des Gedankens, unbekannte Grössen durch Symbole zu beziehen auf bekannte, aber unbestimmt gelassene Grössen.